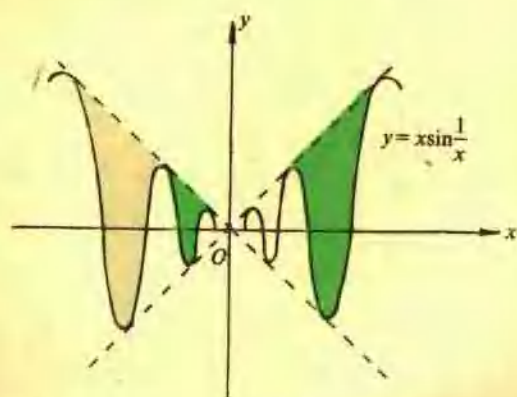


(上册)

高等数学

任国臣 主编



复旦大学出版社

高等数学

(三年制适用)

上册

任国臣 主 编

孙渤海 王维定 毛汉清

田兰英 吴泮敏

等 编

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书阐述了高等数学的最基本的概念、理论、方法及其在自然科学、工程技术等部门的应用,为学习有关专业课程和进一步从事各种实际问题的研究准备必要的数学基础。

全书分上、下两册。

上册内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数,以及初等数学常用公式、平面常用图形等 5 个附录。

下册内容包括:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程,以及空间常用图形、行列式和线性方程组的解、微积分发展简史等 3 个附录。

上、下册各章均附有小结及复习题、习题中配置了基本题和提高题。习题均附有答案,供读者参考。

序

众所周知,在科学技术高度发展的当今世界,无论是作为一门基础理论学科,还是作为应用于自然科学、社会科学以及工程技术的一个工具,数学正在发挥日益重要的影响和作用。可以说,现代科技的几乎每个重大成果都离不开数学的参与和渗透。因此,在我国高等工科院校中加强数学教育,已成为十分迫切的需要。应此需要,铁路高校数学协作组织编写了这套系列数学教材。

一本数学教材,既不是原材料的堆砌,也不是某些定理和公式的随机选取,它应当对所考察的领域提供一个可供游览的园地和一条入门途径。作为工科数学教材,既要考虑到教学的严谨性,又要注意各种应用实例。一本成功的教材,应该瞄准培养适应现代化建设要求的专门人才这个大目标,面向世界,面向未来,根据数学在全局中的地位与作用,精心组织教材内容,注重基本理论、基本知识、基本技能的训练。本系列教材的作者们大都从教多年,具有丰富教学经验。因此,我认为本套系列教材是能够而且已经瞄准了上述目标,为我国工科院校数学教材建设做出重要贡献的。

侯振挺

1994年仲夏之夜写于
长沙铁道学院荷花村

前 言

为落实国家教委关于“抓好专科教材建设”的指示精神，适应高等工业专科院校培养技术人才的急需，解决缺少工程专科三年制适用的高等数学教材问题，进一步提高教学质量，我们在铁道部部属院校数学协作组的组织下，依据“高等学校工程专科高等数学课程教学的基本要求”编写了本教材。

本教材力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”和少而精的原则，在确保科学性的前提下，注意讲清概念，减少数理论证，注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养，重视理论联系实际。为使教材深入浅出，通俗易懂，便于教师讲授与学生自学，本书还适当联系一些生活实际和适量的铁道实际，努力体现高等工程专科特色。同时，我们还注意了知识的可扩展性，为读者在学习本教材后进一步扩大知识面打下必要的基础。

本教材的教学时数为140学时左右，为满足不同专业的需要，编入了部分打“*”号的内容，选用时须另加学时。本教材除供三年制工业专科高等数学教学使用外，也可供要求相近的大学本科和专科、职工大学、业余大学选作教材及工程技术人员和具有高中水平的读者参考和自学。

本教材共12章，分上、下两册。上册有7章，包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数。上册书后附有初等数学中的常用公式、平面常用图形、常用导数公式、常用积分表、初等函数的幂级数展开式等5个附录，以及上册习题答案和提示；下册有5章，包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、常微分方程，下册书后附有空间常用图形、行列式和线性方程组的解、微积分发展简史、数学家简

介等4个附录,以及下册习题答案和提示。本教材每一节后都配置了适量的习题,用双横线将基本题和提高题区别开。为便于自学,每章后都配置了小结和复习题。

本教材由铁道部部属四个院校的数学教师共同编写,主编是北方交通大学任国臣。参加编写人员及分工如下:

石家庄铁道学院:孙渤海(第1—2章) 王维定(第3章);

上海铁道大学:毛汉清(第4章、第8章(向量代数)),
干亚君(第8章(空间解析几何)、第9章);

华东交通大学:吴潋敏(第7章),谢文华(第10章),
龚代华(第11章);

北方交通大学:田兰英(第5—6章)、曾貽德(第12章),
任国臣(统编全书及附录)。

本教材在编写和出版过程中得到了铁道部部属西南交通大学、华东交通大学、北方交通大学、上海铁道大学、长沙铁道学院、大连铁道学院、兰州铁道学院、石家庄铁道学院以及苏州铁道师范学院等各级领导的关心和支持,上海铁道大学洪溃辉、石家庄铁道学院许太喜等教研室主任对本校执笔的初稿提出了宝贵的改进意见,上海铁道大学毛汉清为本书的编写和出版做了不少工作,长沙铁道学院侯振挺副院长在百忙中给本书作序,复旦大学出版社,特别是范仁梅编辑对本书的出版给予了大力支持和帮助,在此一并向他们表示衷心的感谢。

限于我们的水平和经验,书中定有不少缺点和错误,诚恳地希望读者批评指正。

编 者

1994年11月

目 录

第一章 函数	1
第一节 集合	1
一、集合的概念.....	1
二、集合的表示方法.....	2
三、集合的包含关系.....	2
四、集合的运算.....	4
习题 1-1.....	8
第二节 实数集	11
一、实数集.....	11
二、绝对值.....	12
三、区间.....	13
习题 1-2.....	14
第三节 函数的概念	15
一、常量与变量.....	15
二、函数的定义.....	16
三、函数的定义域和值域.....	16
四、函数的表示法.....	18
习题 1-3.....	19
第四节 函数的简单性质	20
一、函数的有界性.....	20
二、函数的单调性.....	21
三、函数的奇偶性.....	21
四、函数的周期性.....	22
习题 1-4.....	24
第五节 反函数、复合函数和隐函数	25
一、反函数.....	25

二、复合函数.....	26
三、隐函数.....	27
习题 1-5.....	28
第六节 初等函数.....	29
一、幂函数.....	29
二、指数函数和对数函数.....	30
三、三角函数和反三角函数.....	31
四、初等函数.....	33
*五、双曲函数和反双曲函数.....	33
习题 1-6.....	40
第七节 分段函数.....	40
习题 1-7.....	42
第八节 建立函数关系的实例.....	43
习题 1-8.....	46
第一章小结.....	47
第一章复习题.....	49

第二章 极限与连续.....51

第一节 数列的极限.....	51
一、数列的概念.....	52
二、数列的极限.....	53
习题 2-1.....	57
第二节 函数的极限.....	58
一、函数极限的概念.....	58
二、极限的性质.....	64
三、极限的运算法则.....	65
习题 2-2.....	67
第三节 无穷小量与无穷大量.....	68
一、无穷小量.....	68
二、无穷大量.....	70
三、无穷小的比较.....	73
习题 2-3.....	75

第四节 极限存在的准则与两个重要的极限	76
一、极限存在的准则	76
二、两个重要的极限	77
习题 2-4	82
第五节 函数的连续性	83
一、函数连续性的概念	84
二、函数的间断	86
三、初等函数的连续性	87
四、闭区间上连续函数的性质	88
五、分段函数的连续性	90
习题 2-5	91
第二章小结	93
第二章复习题	95
第三章 导数与微分	97
第一节 导数的概念	97
一、导数的定义	97
二、导数的几何意义	103
三、可导与连续的关系	104
习题 3-1	106
第二节 导数的四则运算	107
一、函数的和、差的导数	107
二、函数的积的导数	108
三、函数的商的导数	110
习题 3-2	111
第三节 复合函数、反函数的求导法则	112
一、复合函数的求导法则	112
二、反函数的求导法则	116
习题 3-3	118
第四节 初等函数的求导	119
一、常数和基本初等函数的导数公式	119
二、函数和、差、积、商的求导法则	120

三、复合函数的求导法则	120
四、反函数的求导法则	120
五、初等函数的求导要点	122
习题 3-4	122
第五节 分段函数的求导	123
习题 3-5	125
第六节 隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数	125
一、隐函数的导数	125
二、由参数方程所确定的函数的导数	127
习题 3-6	130
第七节 高阶导数	131
习题 3-7	135
第八节 微分	136
一、微分的定义	136
二、微分的几何意义	139
三、微分的运算法则	139
四、微分在近似计算中的应用	142
习题 3-8	143
第三章小结	144
第三章复习题	146
第四章 中值定理与导数的应用	148
第一节 中值定理	148
一、罗尔定理	148
二、拉格朗日中值定理	150
三、柯西中值定理	154
习题 4-1	155
第二节 罗必达法则	156
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	156
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	158
*三、其他类型未定式的极限	159

习题 4-2	163
第三节 台劳公式	164
一、台劳公式	164
二、几个初等函数的麦克劳林展开式	167
习题 4-3	169
第四节 函数的单调性与极值	170
一、函数单调性的判定法	170
二、函数的极值及其求法	173
三、最大值、最小值问题	177
习题 4-4	180
第五节 曲线的凹凸性及拐点	182
一、曲线的凹凸性	182
二、曲线的拐点	184
习题 4-5	186
第六节 函数图形的描绘	186
一、曲线的渐近线——水平、铅直渐近线	186
二、函数图形的描绘	188
习题 4-6	191
第七节 弧微分与曲率	192
一、弧微分	192
*二、曲线及其计算公式	194
*三、曲率圆、曲率半径、曲率中心	198
习题 4-7	200
第八节 方程的近似解——切线法	200
习题 4-8	204
第四章小结	204
第四章复习题	205
 第五章 不定积分	 208
第一节 不定积分的概念及基本性质	208
一、原函数与不定积分	208
二、不定积分的性质	210

习题 5-1	211
第二节 基本积分表	211
一、基本积分公式	211
二、简单不定积分举例	212
习题 5-2	214
第三节 换元积分法	214
一、第一换元积分法	215
二、第二换元积分法	220
三、几个常用的积分公式	224
习题 5-3	226
第四节 分部积分法	227
习题 5-4	231
第五节 有理函数的不定积分	231
习题 5-5	235
第六节 积分表的使用	235
习题 5-6	237
第五章小结	237
第五章复习题	239

第六章 定积分及其应用	240
第一节 定积分的概念	240
一、定积分问题引例	240
二、定积分的定义	242
三、定积分的几何意义	244
习题 6-1	245
第二节 定积分的性质	246
习题 6-2	250
第三节 定积分的基本公式	250
一、积分上限的函数及其导数	250
二、牛顿-莱布尼兹公式	252
习题 6-3	253
第四节 定积分的换元积分法与分部积分法	254

一、定积分的换元积分法	254
二、定积分的分部积分法	258
习题 6-4	261
第五节 定积分的近似计算——辛卜生法	261
习题 6-5	265
第六节 广义积分	266
一、积分区间为无限区间的广义积分	266
二、被积函数有无穷间断点的广义积分	268
习题 6-6	270
第七节 定积分的应用	270
一、定积分的元素法	270
二、定积分的几何应用	271
三、定积分的物理应用	278
习题 6-7	282
第六章小结	284
第六章复习题	287
第七章 无穷级数	289
第一节 级数的概念及性质	289
一、数项级数的概念、收敛与发散	289
二、无穷级数的基本性质(级数收敛的必要条件)	291
习题 7-1	293
第二节 正项级数的审敛法	293
一、正项级数收敛的充分必要条件	294
二、比较判别法	294
三、比值判别法	296
习题 7-2	298
第三节 交错级数与任意项级数	299
一、交错级数的概念及其收敛判别法	299
二、任意项级数的概念、绝对收敛与条件收敛	300
习题 7-3	303
第四节 幂级数	303

一、函数项级数的概念、幂级数的概念	303
二、幂级数的收敛区间	305
三、幂级数在其收敛区间内的基本性质	309
习题 7-4	312
第五节 台劳级数	313
一、函数展开成台劳级数	313
二、把函数展开成幂级数	316
习题 7-5	320
第六节 函数的幂级数展开式的应用	321
一、近似计算	321
二、欧拉公式	323
习题 7-6	324
*第七节 富里叶级数	325
一、三角函数系的正交性	325
二、以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的富里叶级数	326
三、奇函数和偶函数的富里叶级数	330
四、以 $2l$ 为周期的函数的富里叶级数	332
五、定义在区间 $[-l, l]$ 上的函数的富里叶级数	334
六、定义在 $[0, l]$ 上的函数展成正弦级数或余弦级数	336
习题 7-7	337
第七章小结	338
第七章复习题	344
附录一 初等数学中的常用公式	346
附录二 平面常用图形	352
附录三 常用导数公式	364
附录四 常用积分公式	367
附录五 初等函数的幂级数展开式	381
上册习题答案和提示	384

第一章 函 数

自然科学的任务就是认识世界,数学是认识世界的一种重要工具。自然界的许多规律,需要通过变量之间的某种依从关系来研究,函数关系是一种重要的依从关系,它是高等数学研究的重要对象。本章将介绍函数的基本概念、基本内容及其简单性质。

熟练掌握本章的内容是学好本课程的前提和基础。集合是数学的一个基础概念,因此,首先介绍集合等概念及其简单运算。

第一节 集 合

一、集合的概念

具有一定共同特征的一类事物的全体叫做集合,简称集。把组成某集合的各个事物叫做该集合的元素。

集所包含的元素为有限个或无限多个,分别叫做有限集或无限集。

铁道部全体职工组成一个集,每个铁路职工都是这个集的元素;中国所有铁路桥梁组成一个集,每一座铁路桥梁都是这个集的元素;所有的等边三角形组成一个集,每一个等边三角形都是该集的元素;自然数的全体组成一个集,每一个自然数都是该集的元素。显然,前两个集是有限集,而后两个集是无限集。

若 a 是集 A 的元素,记为“ $a \in A$ ”,读作“ a 属于 A ”;若 a 不是集 A 的元素,记为“ $a \notin A$ ”,读作“ a 不属于 A ”。

对一个给定的集,其元素就是确定的。如果设 N 为自然数所组成的集,则 $1 \in N$, $100 \in N$, $-2 \notin N$, $\sqrt{2} \notin N$ 。一般地,对于一个给定的集 A 来说,某一事物 ω 或者 $\omega \in A$;或者 $\omega \notin A$,两者必居其一。

二、集合的表示方法

1. 列举法

是把属于某个集的元素一一列举在大括号 $\{ \}$ 内, 每个元素仅写一次, 不考虑元素的顺序。当集的元素很多, 不需要或不可能一一列出时, 可以用省略表示。如, 小于 1000 的自然数组成的集可以表示为 $\{1, 2, \dots, 999\}$; 奇数组成的集表示为 $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$ 。

2. 描述法

是把属于某个集的元素所具有的特性性质描述在大括号内。如, 方程 $x^2-1=0$ 的解的全体组成的集可表示为 $\{x|x^2-1=0\}$ 。一般地, $A = \{x|x \text{ 具有性质 } p\}$, 括号内“ $|$ ”的左边的 x 表示集 A 所含元素的一般形式, 右边表示元素 x 所具有的特性性质。

上述两种表示法, 可视具体问题选其一种。有时一个集两种方法都可用。如 $\{x|x^2-1=0\}$ 也可以表示为 $\{1, -1\}$ 。

三、集合的包含关系

1. 子集

对于两个集 A 和 B , 若集 A 的任何一个元素都是集 B 的元素, 那么集 A 称为集 B 的子集, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作“ A 包含在 B 中”或“ B 包含有 A ”。注意此时若 $a \in A$, 则必有 $a \in B$ 。也可按其逆否命题理解: 若 $a \notin B$, 则必有 $a \notin A$ 。

只有一个元素的集称为单元素集。如 $\{0\}$ 。

不含任何元素的集称为空集, 记为 ϕ 。如方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解所构成的集就是空集, 因为在实数范围内方程 $x^2+1=0$ 无解。这里注意: 空集 ϕ 与集 $\{0\}$ 是两个不同的概念。我们规定空集 ϕ 是任何集 A 的子集。即 $\phi \subseteq A$ 。

对于一个非空集 A , 显然有

$$A \subseteq A.$$

也就是说, 任何一个集是它本身的子集。

① 规定的合理主要是若 $a \in A$, 则必有 $a \in \phi$ (由空集的定义); 即 $\phi \subseteq A$ 。

2. 真子集

如果集 A 是集 B 的子集, 且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集, 记为:

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

例如, $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, 又如 $\phi \subset A$ (非空).

为了形象地说明集之间的关系, 通常用圆或任意封闭曲线围成的图形表示集, 而用其中的点表示该集的元素. 这样的图形称为文 (Venn) 氏图.

图 1-1 表示 A 是 B 的真子集.

为直观起见, 以后我们常借用文氏图说明问题.

例 1 写出集 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

解 集 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集是: ϕ , 其中除 $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$, 其中除 $\{0, 1, 2\}$ 外, 其余都是真子集.

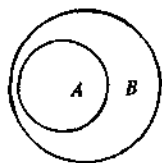


图 1-1

例 2 讨论集 $\{x | x^2 < 9\}$ 与集 $\{x | |x-1| < 2\}$ 的包含关系.

解 由于不等式 $x^2 < 9$ 的解为 $-3 < x < 3$, 所以集 $\{x | x^2 < 9\}$ 又可表示为 $\{x | -3 < x < 3\}$. 而不等式 $|x-1| < 2$ 的解为 $-1 < x < 3$, 所以集 $\{x | |x-1| < 2\}$ 又可表示为 $\{x | -1 < x < 3\}$. 故后者是前者的真子集. 即

$$\{x | -1 < x < 3\} \subset \{x | -3 < x < 3\}.$$

3. 集合的相等

对于两个集 A 和 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 则称集 A 等于 B , 记为

$$A=B \text{ (或 } B=A).$$

例 3 设 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 < 0\}$, $B = \{x | -2 < x < -1\}$. 验证 $A=B$.

证 由于不等式 $x^2 + 3x + 2 < 0$ 的解为 $-2 < x < -1$, 所以 A 可表示为 $\{x | -2 < x < -1\}$, 故 $A=B$.