普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学基础
线性代数与解析几何

魏战线　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学基础

线性代数与解析几何

魏战线　编

高等教育出版社

内容提要

本套教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材，共分三册，本书是其中的一册。本书内容包括行列式、矩阵、几何向量及其应用、n 维向量与线性方程组、线性空间与欧氏空间、特征值与特征向量、二次曲面与二次型、线性变换等八章。

本书力求将线性代数与解析几何相互结合，相互渗透；注重数学思想方法的讲授和培养读者运用数学知识解决问题的能力，努力揭示数学概念的本质；讲解上力求通俗易懂，由直观到抽象，层次分明，说理清晰，富于启发性；适当增加了线性代数的应用实例；例题与习题丰富，习题分为 A，B 两类，书末附有习题答案和提示。

本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材，既可与微积分课程配套使用，也可单独作为线性代数课程教材，还可供有关教师和科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与解析几何／魏战线编．—北京：高等教育出版社，2004.7

ISBN 7－04－014398－4

Ⅰ．线…　Ⅱ．魏…　Ⅲ．①线性代数－高等学校－教材②解析几何－高等学校－教材　Ⅳ．①O151.2②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 046070 号

策划编辑　王　强　**责任编辑**　王文颖　**封面设计**　刘晓翔　**责任绘图**　吴文信
版式设计　史新薇　**责任校对**　胡晓琪　**责任印制**　杨　明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2004 年 7 月第 1 版
印　张	21	印　次	2004 年 7 月第 1 次印刷
字　数	380 000	定　价	22.10 元

郑重声明

前　言

本套教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。全套教材共分三册，即《一元函数微积分与无穷级数》、《线性代数与解析几何》、《多元函数微积分与常微分方程(组)》，其中的微积分部分是作者编写的《工科数学分析基础》的简化本。《工科数学分析基础》是由高等教育出版社出版的面向21世纪教材之一，也是“九五”国家级重点教材，并于2001年获“中国高等学校科学技术一等奖”，2002年获“国家优秀教材一等奖”，适用于高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业的本科生。本套教材则兼顾科技发展的需要和当前我国高等院校的实际情况，对《工科数学分析基础》内容的深广度作了较大幅度的调整，使其适用于多数院校的教学需求。本套教材在编写的指导思想和内容体系方面继承了《工科数学分析基础》的一些主要特色：

1. 适当拓宽必要的数学基础。与《工科数学分析基础》相比，本套教材虽然删去了实数完备性、确界定理、一致连续、含参变量积分、微分方程稳定性与无限维分析等内容，削减了极限理论以及某些定理的证明，并在级数的一致收敛、微分方程组前冠以“*”号，不作为教学基本要求，但是，本套教材保留了在集合与映射的基础上讲解函数和极限的基本理论、向量值函数的微分，以及通过向量值函数的微分来研究曲线与曲面的性质等内容。对于没有给出分析证明的重要定理，也努力通过几何直观或其他方法分析并揭示定理的正确性或定理证明的基本思路，以便使学生在掌握必要的数学知识的同时，在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的基本训练，培养他们的理性思维方法，提高数学素养和能力。

2. 注意分析、代数与几何相关内容的有机结合和相互渗透。本套教材从多元函数微分学开始，就注意逐步加强向量和矩阵的运用，利用向量、矩阵和线性代数中的知识来表述微积分中的有关内容，并采用从2维、3维逐步过渡到n维的讲解方法。例如，利用Jacobi矩阵来表示向量值函数的导数和微分；用向量值函数的微分来研究曲线和曲面的性质；将第二型线面积分与向量场的研究结合起来等。另一方面，在线性代数中，又列举了一些分析方面的例题，说明线性代

数的某些概念。例如，在讲解内积时，介绍了用两个函数乘积的定积分定义函数空间中内积的例子；在矩阵特征值理论中讲解了它在求解线性微分方程组方面的应用等。这样做，既有利于培养学生综合运用数学知识的能力，又能更好地满足现代科技的发展对数学的需求。

3. 强化学生数学应用能力的培养。在讲解数学内容的同时，着力于揭示数学概念的本质和在实际问题中有重要应用的数学思想方法是本套教材的另一个鲜明特色。例如，编者反复强调了微积分基本思想方法、局部线性化方法、逼近的思想、最优化方法、微元法以及变量代换的思想和方法等。为了培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴趣和能力，书中精选了一批工程、生态、人口、经济、医学，甚至日常生活方面饶有趣味的应用性例题和习题，并配备了一些综合练习题，供读者选作。

4. 削减次要内容，淡化运算技巧的训练。与某些传统教材相比，本套教材精简了一些次要内容。例如，以链式法则为主线讲解一元函数求导法；以换元和分部两种基本方法为主线讲解积分法，将一些简单的有理函数、三角有理函数和无理函数的积分作为两种基本积分法的应用例题；将某些近似计算方法移至《数学实验》等后继课中；每节配备的习题均分为 A，B 两类，微积分部分每章后还配备了一些综合性习题。A 类为基本要求题，致力于基本概念、基本理论、基本运算和应用的训练；B 类题以及每章后配备的习题，可供学有余力的同学选作。

5. 适当采用了一些近代数学的思想、术语和符号，为学生学习近代数学开设一些“窗口”和“接口”。与《工科数学分析基础》相比，本套教材删去了不少要求较高的内容，但仍保留了某些近代数学的思想和观点。例如，将多元函数分为数量值函数与向量值函数，定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射；将定积分、重积分、第一型线（面）积分统一为几何形体上的数量值函数的积分；以参数方程为主线讲解曲线与曲面的有关内容等。但在讲解这些内容时，我们更加注意可接受性，采用由直观到抽象，由特殊到一般的方法循序渐进，逐步深入。

本套教材中的《线性代数与解析几何》分册介绍了线性代数和空间解析几何的基本内容，共分八章。该分册采用模块式结构，可根据不同专业的教学要求和学时对内容进行取舍。讲完基本内容（除打“*”的部分）约需 44 ~ 48 学时，讲完全部内容约需 56 ~ 60 学时。该分册力求将线性代数与解析几何相互结合，相互渗透，并为学习多元微积分和常微分方程（组）提供必要的准备，因此，它既可与微积分课程配套使用，又可单独作为线性代数课程的教材。

由于学习本套教材的《多元函数微积分和常微分方程（组）》分册需要少量线性代数与空间解析几何知识，因此使用本套教材可采用两种不同的方法：一种是将线性代数与空间解析几何单独设课，与一元函数微积分双轨并进，在学习

《多元函数微积分与常微分方程(组)》前完成;另一种是用单轨串连式,即先讲一元微积分,再讲线性代数与解析几何,最后讲多元微积分。本套教材在《多元函数微积分与常微分方程(组)》后编写了一个附录,简要介绍了使用该分册时所必须具备的线性代数和空间解析几何的基本知识。这样,即便对于某些将线性代数在二年级单独设课,而将空间解析几何放在高等数学课程中讲解的院校,也可用本套教材作为教材。

另外,为了便于在高等数学课程中进行双语教学,编者与美国著名数学家Fred Brauer合作,编写了书名为《Fundamentals of Advanced Mathematics》的英文教材,将由高等教育出版社正式出版。该书在体系和内容方面与本套教材基本相同,是两本相互配套的教材。因此,一方面,本套教材可作为使用该英文教材进行双语教学师生配套的参考书;另一方面,使用本套教材的读者也可将该英文教材作为一本英文参考书。

参加本套教材编写的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣和徐文雄。全套教材分三册,其中《一元函数微积分与无穷级数》由王绵森、马知恩主编,《多元函数微积分与常微分方程(组)》由马知恩、王绵森主编,《线性代数与解析几何》由魏战线编。本套教材已在西安交通大学电气工程学院等多个教学大班试用过2~3届,任课教师提出的许多宝贵意见对书稿的修改完善起了重要作用,借此机会对参加试用的所有教师表示衷心的感谢。同时,感谢高等教育出版社的有关编辑同志,他们为本套教材的出版和质量的提高起了十分重要的作用。

本套教材得到了高等教育出版社和西安交通大学教务处的资助,在此,我们向有关方面一并表示感谢!

本套教材虽几经试用和修改,但由于编者水平所限,加之时间较紧,不妥之处在所难免。恳请专家、同行以及广大读者不吝指正,使本书在今后的教学实践中日臻完善!

编　者

2004年4月于西安交通大学

目　录

第1章 行列式

行列式是线性代数的一个基本工具，在很多问题的研究中都要用到行列式. 在初等代数中，为了求解2元及3元线性方程组（即关于未知量的1次方程组），引入了2阶和3阶行列式，并用2阶（3阶）行列式简明地表达了一类2元（3元）线性方程组的解. 本章将把类似的讨论及求解方法推广到 n 元线性方程组，为此，先要引入 n 阶行列式的概念. 本章首先采用简明的递归法引入 n 阶行列式的定义；进而讨论 n 阶行列式的基本性质及常用的计算方法；最后介绍求解 n 元线性方程组的 Cramer 法则. Cramer 法则只是行列式的一个应用，在本书后面关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中，行列式都是必不可少的研究工具.

第一节 行列式的定义与性质

1.1.1 2阶行列式与一类2元线性方程组的解

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的线性方程组时提出的. 例如，对于由2个方程2个未知量组成的线性方程组（其中 x_1, x_2 为未知量）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \cdots\cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \cdots\cdots ② \end{cases} \tag{1.1.1}$$

我们用消元法来求它的解. 注意 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 不全为零，不妨设 $a_{11} \neq 0$，于是可利用方程①消去方程②中的未知量 x_1，这只要方程②加上方程①的

$\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$倍，便可把方程组(1.1.1)化成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ \left(a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & \cdots\cdots③ \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由方程④解出 x_2，再把解出的 x_2 代入方程③解出 x_1，便得方程组(1.1.1)有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

为了简明地表达这个解，人们引入了 2 阶行列式. 2 阶行列式是由 4 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 排成 2(横)行、2(竖)列的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.1.3}$$

并用它来表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即**2 阶行列式的定义为**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{def}} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1.4}$$

其中，a_{ij}称为行列式的**元素**. a_{ij}的两个下标用来表示该元素在行列式中的位置，其第 1 个下标(称为行标)为 i，表明该元素位于行列式的第 i 行；第 2 个下标(称为列标)为 j，表明该元素位于行列式(左起)的第 j 列. 通常称位于行列式的第 i 行、第 j 列处的元素 a_{ij}为行列式的(i,j)元素.

(1.1.4)式的右端也称为 2 阶行列式(1.1.3)的展开式，它可用下述的对角线计算法则来记忆：如图 1.1.1，用实联线(称为行列式的主对角线)上两个元素的乘积，减去虚联线(称为行列式的副对角线)上两个元素的乘积，所得的差就是 2 阶行列式(1.1.3)的展开式.

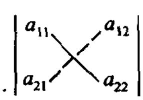

图 1.1.1

利用 2 阶行列式，(1.1.2)式可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{1.1.5}$$

其中，分母是由方程组(1.1.1)的系数按它们原来在方程组中的次序所排成的 2

阶行列式，称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**. 于是，可把方程组(1.1.1)的上述解法总结为：如果方程组(1.1.1)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组(1.1.1)有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \tag{1.1.6}$$

其中，D_j 是将系数行列式 D 的第 j 列元素依次用方程组右端的常数项替换后所得的 2 阶行列式($j=1,2$)，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 - 4x_2 = -14. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times 1 = -11 \neq 0,$$

所以方程组有惟一解. 又由

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -14 & -4 \end{vmatrix} = 5 \times (-4) - 3 \times (-14) = 22,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -14 \end{vmatrix} = 2 \times (-14) - 5 \times 1 = -33,$$

代入(1.1.6)式，得方程组的惟一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 3. \blacksquare$$

利用行列式对方程组(1.1.1)的上述讨论，其结果是优美的，而且是很有用的. 那么，能否将这一结果推广到由 n 个方程、n 个未知量组成的线性方程组上去呢？答案是肯定的，其结果就是我们在第三节将要介绍的 Cramer 法则. 但要导出求解 n 元线性方程组的 Cramer 法则，先要将 2 阶行列式的定义加以推广，引入 n 阶行列式的定义并建立 n 阶行列式的理论.

1.1.2 n 阶行列式的定义

为了将 2 阶行列式推广到 n 阶行列式，我们先来分析 2 阶行列式定义式的结构规律. 如果定义 1 阶行列式 $|a| = a$，则不难看出 2 阶行列式可以用 1 阶行列

式来表示,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}|$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

其中,$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$,而 M_{1j}是将行列式中$(1,j)$元素所在的第1行元素和第j列元素都删去后所得到的1阶行列式$(j=1,2)$,并称 M_{1j}为 a_{1j}的余子式,而称 A_{1j}为 a_{1j}的代数余子式. 可见,2阶行列式等于它的第1行各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和. 将此推广,便可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1.1 (n 阶行列式) n 阶行列式是由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行、n 列的算式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.1.7}$$

可简记成 $\det(a_{ij})_{n\times n}$或 $\det(a_{ij})$,并用它来表示一个数. 当 $n=1$ 时,规定

$$D = |a_{11}| \xlongequal{\text{def}} a_{11}$$

(注意不要把1阶行列式$|a_{11}|$与 a_{11}的绝对值相混淆). 当 $n=2,3,\cdots$时,用以下公式递归地定义 n 阶行列式的值为

$$D \xlongequal{\text{def}} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}\text{①}, \tag{1.1.8}$$

其中,$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$,而 M_{1j}是删去 D 中第1行元素和第j列元素后所形成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

定义 1.1.2 (余子式与代数余子式) 在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$中,称删去 a_{ij}所在的第 i 行元素和第 j 列元素后所形成的 $n-1$ 阶行列式为 a_{ij}的**余子式**,记为 M_{ij},而称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

---

① 关于求和符号"$\sum$"的用法可参阅本章附录.

为 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如,在 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

中,(2,3)元素的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = 6.$$

这样一来,根据定义 1.1.1 和定义 1.1.2,便可把 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式的定义说成:**n 阶行列式等于它的第 1 行各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和**,并称(1.1.8)式为 **n 阶行列式按第 1 行展开的公式**.

在 n 阶行列式(1.1.7)中,称元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线为行列式的**主对角线**,相应地称 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为行列式的**主对角线元素**;另一条对角线(即从右上角到左下角的对角线)称为行列式的副对角线,位于副对角线上的元素称为行列式的副对角线元素.

n 阶行列式代表一个数,以后在不致发生混淆时,我们把 n 阶行列式与它的值不予严格区分.

例 1.1.2 计算 3 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 由定义 1.1.1,得

$$\begin{aligned} D &= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \\ &\quad 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\times 2 + 2\times 4 + 1\times 1 \\ &= 15. \end{aligned}$$

一般地,由定义 1.1.1,可得 3 阶行列式的计算公式为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$