College

高等学校经典教材配套辅导丛书

高等代数

学习指导与习题详解

（高等教育第三版）

杨振华　李志慧　主编

◆ 难点、考点归纳 ◆ 习题全部详解

◆ 名校期末题、考研题精选精解

陕西师范大学出版社

高等代数

学习指导与习题详解

主　编　杨振华　李志慧
编　者　杨振华　王爱奇　刘兴祥
　　　　杨闻起　苏忍锁　李志慧

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0851

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学习指导与习题详解/杨振华编. 一西安:陕西师范大学出版社,2005.9

(大学教辅)

ISBN 7—5613—3290—4

Ⅰ.高… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等代数—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 107615 号

策　　划	雷永利　史俊孝
责任编辑	陈焕斌
封面设计	王静婧
责任校对	田小侠
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　　址	http://www.snuph.com
经　　销	新华书店
印　　刷	陕西师范大学印刷厂
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	14.5
字　　数	331 千
版　　次	2005 年 9 月第 1 版
印　　次	2005 年 9 月第 1 次
印　　数	8000
定　　价	17.50 元

开户行:光大银行西安电子城支行　账号:0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

E—mail:if—centre@snuph.com

前　言

《高等代数》是高等院校数学专业一门重要的专业基础课程．学生在学习中，普遍反映习题难做．我们编写这本《高等代数学习指导与习题详解》，是为了提高学习效率，在使用习题解析的同时，举一反三，从中得到启发、升华．

本书分为三部分内容：

第一部分是根据北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组所编《高等代数》第三版而编写的习题解析．解析中所引用的定理都出自于该书．考虑到学时和实际情况，除了关于多元多项式、对称多项式、二元高次方程、最小多项式等少数习题外，对其余习题和补充题都做了详细的解答．同时我们还选解了张禾瑞、郝钢新所编《高等代数》第四版中的一些典型习题．在做解答时，有些题作了解前提示或思路分析，有些题作了解后点评，有些题作了一题多解．习题解析可以帮助学习者准确掌握基本概念，深刻理解基本理论，并开拓处理问题的思想方法和技巧，提高解决问题的能力．

第二部分是选编了一些重点大学的高等代数(线性代数)教学考试题及其解答．授课教师和学生可以从一个侧面了解兄弟院校对教学的基本要求，达到互相学习、互相促进、共同提高的目的．

第三部分是选编了一些重点大学近期的硕士研究生入学考试高等代数(线性代数)试题及其解答．有志于报考研究生的学生可以作为参考，希望对于他们的考前复习有所帮助．

本书是集教、学、考研于一体的参考书．

参加编写工作的有杨振华、王爱奇、刘兴祥、杨闻起、苏忍锁、李志慧(姓名按编写顺序排序)．由于水平有限，错误或不妥之处，敬请指正．

编　者

2005 年 8 月

目　录

第一部分
高等代数习题解析

第二部分

部分重点院校高等代数(线性代数)期末试题及参考答案

第三部分

部分重点院校高等代数(线性代数)考研试题及参考答案

第一部分　高等代数习题解析

第一章　多项式

习　题

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

1）$f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$；

2）$f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$.

解　1）$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}, r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

2）$q(x)=x^2+x-1, r(x)=-5x+7$.

2. m,p,q 适合什么条件时，有

1）$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$；

2）$x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$.

解　1）用 x^2+mx-1 除 x^3+px+q 得余式为

$$r(x)=(p+1+m^2)x+(q-m).$$

因为要求整除，所以必有 $r(x)=0$，即

$$(p+1+m^2)x+(q-m)=0$$

于是得出，当 m,p,q 满足条件

$$p+1+m^2=0, q-m=0$$

时，$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$.

2）仿上面方法可得到

$$\begin{cases} m(2-p-m^2)=0, & (1) \\ q+1-p-m^2=0. & (2) \end{cases}$$

当 $m=0$ 时，代入(2)得 $p=q+1$.

当 $m\neq 0$ 时，由(1)得 $2-p-m^2=0$，即 $m^2=2-p$. 代入(2)，

得 $q=1$.

所以,当

$$\begin{cases} m=0, \\ p=q+1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} m^2=2-p, \\ q=1 \end{cases}$$

时,$x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$.

3. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x, g(x)=x+3$;

2) $f(x)=x^3-x^2-x, g(x)=x-1+2i$.

提示 本题和4题都可以利用带余除法去做,我们在这里应用一种更为简便的方法——综合除法来解这两道题. 综合除法是用特殊多项式 $x-a$ 除 $f(x)$ 的简便方法,其方法以及理论推导过程,请参看张禾瑞,郝钢新编写的《高等代数》(第四版)61页和62页.

解 1)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 \\ & & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & -327 \end{array}$$

所以

$$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109, r(x)=-327.$$

2) 仿1)题方法求得

$$q(x)=x^2-2\mathrm{i}x-(5+2\mathrm{i}), r(x)=-9+8\mathrm{i}.$$

4. 把 $f(x)$ 表示成 $x-x_0$ 的方幂和,即表示成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式:

1) $f(x)=x^5, x_0=1$;

2) $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$;

3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i, x_0=-i.$

提示　以1)题为例,因为 x^5 是5次多项式,所以设

$$
\begin{aligned}
x^5 &= c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+c_3(x-1)^3+c^4(x-1)^4+\\
&\quad c_5(x-1)^5\\
&= c_0+(x-1)[c_1+c_2(x-1)+c_3(x-1)^2+c_4(x-1)^3+\\
&\quad c_5(x-1)^4].
\end{aligned}
$$

那么 c_0 为 $x-1$ 除 x^5 的余式,利用综合除法先求出 c_0.

如果用 $q(x)$ 表示 $x-1$ 除 x^5 得到的商式,那么因为

$$q(x)=c_1+(x-1)[c_2+c_3(x-1)+c_4(x-1)^2+c_5(x-1)^3],$$

所以 c_1 又是 $x-1$ 除 $q(x)$ 的余式,再利用综合除法求出 c_1.

照此做下去,连续做综合除法,依次可求出 c_2,c_3,c_4,c_5.

解　1)

$$
\begin{array}{r|llllll}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1=c_0 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5=c_1 & \\
 & & 1 & 3 & 6 & & \\ \hline
1 & 1 & 3 & 6 & 10=c_2 & & \\
 & & 1 & 4 & & & \\ \hline
1 & 1 & 4 & 10=c_3 & & & \\
 & & 1 & & & & \\ \hline
 & 1 & 5=c_4 & & & & \\
 & =c_5 & & & & &
\end{array}
$$

所以 $f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$.

2) 仿1)题方法可得

$f(x)=11-24(x+2)+22(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$.

3) 同样仿1)题方法可得

$f(x)=(7+5\mathrm{i})-5(x+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})^2-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3+(x+\mathrm{i})^4$.

5. 求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式:

1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$;

2) $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$;

3) $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

解 1) $(f(x),g(x))=x+1$.

2) $(f(x),g(x))=1$.

3) $(f(x),g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1$.

6. 求$u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$:

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$.

解 1)

	$f(x)$	$g(x)$	
$q_1(x)=1$	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$ $x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$ $x^4 \quad -2x^2$	$q_2(x)$ $=x+1$
$q_3(x)=x$	$r_1(x)=x^3-2x$ x^3-2x	$x^3+ \quad x^2-2x-2$ $x^3 \quad -2x$	
	0	$r_2(x)=x^2-2$	

所以 $(f(x),g(x))=x^2-2=r_2(x)$.

再由

$$\begin{cases} f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x), \\ g(x)=g_2(x)r_1(x)+r_2(x), \end{cases}$$

解得:

$r_2(x)=g(x)-q_2(x)r_1(x)$

$$=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]$$
$$=[-q_2(x)]f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x),$$

所以　$u(x)=-q_2(x)=-x-1$,

$v(x)=1+q_1(x)q_2(x)=1+1\cdot(x+1)=x+2.$

2）仿上面方法,可得

$$(f(x),g(x))=x-1,$$
$$u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1.$$

3）
$$(f(x),g(x))=1.$$
$$u(x)=-x-1.\ v(x)=x^3+x^2-3x-2.$$

7. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u,g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

解　(原题中的 $g(x)$ 改为 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 较妥).

对 $f(x),g(x)$ 作辗转相除法. 首先

$$f(x)-g(x)=x^2+2x+u$$

其次

$$\begin{array}{l|ll|l}
x^2+2x+u & x^3+tx^2 & +u & x+(t-2) \\
 & x^3+2x^2+ux & & \\
\cline{2-3}
 & (t-2)x^2-ux & +u & \\
 & (t-2)x^2+2(t-2)x & +u(t-2) & \\
\cline{2-3}
 & \quad(-u-2t+4)x & +u(3-t) &
\end{array}$$

因为最大公因式是二次的,所以余式为0,即

$$(-u-2t+4)x+u(3-t)=0.$$

由此得

$$\begin{cases} -u-2t+4=0, & (1)\\ u(3-t)=0. & (2)\end{cases}$$

当 $u=0$ 时,由(1)得 $t=2$.

当 $u\neq 0$ 时,由(2)得 $3-t=0$,即 $t=3$,代入(1)得 $u=-2$. 所以 t 与 u 的值为

$$\begin{cases} u=0, \\ t=2, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} u=-2, \\ t=3. \end{cases}$$

8. 证明:如果 $d(x)\mid f(x)$,$d(x)\mid g(x)$,且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

证 首先,已知 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式.

其次,设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一个公因式,下面证 $\varphi(x)\mid d(x)$.

因为 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,即存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$,使

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x),$$

而 $\varphi(x)\mid f(x)$,$\varphi(x)\mid g(x)$,所以 $\varphi(x)\mid d(x)$,故结论成立.

点评 最大公因式的证明也可以利用此题的结论,从而省去一个步骤.

9. 证明:$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$,($h(x)$ 的首项系数为 1).

证 首先,由 $(f(x),g(x))\mid f(x)$,$(f(x),g(x))\mid g(x)$ 得 $(f(x),g(x))h(x)\mid f(x)h(x)$,$(f(x),g(x))h(x)\mid g(x)h(x)$.

其次,存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$ 使

$$(f(x),g(x))=f(x)u(x)+g(x)v(x),$$

因而得

$$(f(x),g(x))h(x)=f(x)h(x)u(x)+g(x)h(x)v(x).$$

由第 8 题知,$(f(x),g(x))h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个最大公因式. 又 $(f(x),g(x))h(x)$ 的首项系数为 1,所以

$$(f(x)g(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x).$$

点评　证明中用到了定理 2,即两个多项式的最大公因式可以表示成这两个多项式的组合. 应当注意,其逆命题不成立.

10. 如果$f(x),g(x)$不全为零,证明:

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$$

证　存在 $u(x),v(x)$使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$$

因为$f(x),g(x)$不全为零,所以$(f(x),g(x))\neq 0$,由消去律得

$$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}u(x)+\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}v(x)=1 \qquad (*)$$

故$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$

点评　由等式$(*)$还可以得出:$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},v(x)\right)=1$,$\left(u(x),\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$ 以及$(u(x),v(x))=1$.

11. 证明:如果$f(x),g(x)$不全为零,且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)),$$

那么$(u(x),v(x))=1$.

证　与上题相同,略.

12. 证明:如果$(f(x),g(x))=1$,$(f(x),h(x))=1$,那么$(f(x),g(x)h(x))=1$.

提示　可以利用第一章定理 3 或者两个多项式互素的充分必要条件是它们的公因式都是零次的.

证法 1　由题设,存在多项式 $u_1(x),v_1(x),u_2(x),v_2(x)$,使

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1, \qquad (1)$$

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)g(x)=1. \qquad (2)$$

将(1),(2)两式相乘,得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x)+v_1(x)u_2(x)g(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)]$$
$$\cdot f(x)+[v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x)=1.$$

所以

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

证法 2 由于$(f(x),g(x))=1$,因此存在 $u(x),v(x)$使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

两边乘 $h(x)$得

$$f(x)u(x)h(x)+g(x)h(x)v(x)=h(x).$$

由上式可以看出,$f(x)$与 $g(x)h(x)$的每个公因式都是 $h(x)$的因式,因而是$f(x)$与 $h(x)$的公因式,但$(f(x),g(x))=1$,故

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

证法 3 假设$(f(x),g(x)h(x))\neq 1$,令

$$(f(x),g(x)h(x))=d(x),$$

那么$\partial(d(x))>0$,于是 $d(x)$存在不可约因式 $p(x)$,有

$$p(x)\mid f(x),p(x)\mid g(x)h(x).$$

因为$(f(x),g(x))=1$,所以 $p(x)\nmid g(x)$,从而 $p(x)\mid h(x)$,即 $p(x)$是$f(x)$与 $h(x)$的次数大于零的公因式,与$(f(x),h(x))=1$矛盾. 故

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

13. 设$f_1(x),\cdots,f_m(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)$都是多项式,而且

$$(f_i(x),g_j(x))=1,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

求证:$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$

证 根据条件$(f_1(x),g_1(x))=1,(f_1(x),g_2(x))=1,\cdots,(f_1(x),g_n(x))=1$,反复应用第 12 题,可得

$$(f_1(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

同理可证

$$(f_2(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

…………

$$(f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

对于上面 m 个等式,再反复应用第 12 题,得

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

14. 证明:如果 $(f(x),g(x))=1$,那么 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

证法 1　由题设知,存在 $u(x),v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1.$$

从而有

$$[u(x)-v(x)]f(x)+v(x)[f(x)+g(x)]=1,$$

所以

$$(f(x),f(x)+g(x))=1.$$

同理

$$(f(x),f(x)+g(x))=1.$$

应用第 12 题,得

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1.$$

证法 2　假设 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))\neq1$,令

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=d(x),$$

那么 $\partial(d(x))>0$,于是 $d(x)$ 存在不可约因式 $p(x)$,有

$$p(x)\mid f(x)g(x),p(x)\mid[f(x)+g(x)].$$

由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 知 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$,不妨设 $p(x)\mid f(x)$,再由 $p(x)\mid[f(x)+g(x)]$ 可得 $p(x)\mid g(x)$,因此 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 次数大于零的公因式,这与 $(f(x),g(x))=1$ 矛盾,故

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1.$$

点评　12 题证法 3 与 14 题证法 2 的证明思路是一样的,在用反证法时,都利用了因式分解定理.

15. 求下列多项式的公共根:

$$f(x)=x^3+2x^2+2x+1;g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1.$$

提示　$f(x)$ 与 $g(x)$ 的全部公共根就是它们的最大公因式