



张家驹 王智勤

赵兴业 编

中国环境科学出版社

初中几何

重点问题详解

重点问题详解

初中几何

张家驹 王智勤 赵兴业 编

中国环境科学出版社

1993

(京) 新登字089号

内 容 简 介

本书包括初中几何全部知识内容，对其中应知应会的知识点和重难点、或易混易错不好掌握的疑点，以及可能遇到的各种问题，逐一提出问题，并做了详尽的回答，有些问题还配有必要的小型练习，以求弄清知识、巩固概念，发展能力。

本书条目按课文顺序编排，易于查找。适合初中学生及自学青年阅读参考，也可供教师备课参考。

重点问题详解

初中几何

张家驹 王智勤 赵兴业 编

中国环境科学出版社出版

北京崇文区北岗子街8号

兰河县宏达印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

1993年3月第一版

开本787×1092 1/32

1993年3月第一次印刷

印张8 3/8

印数 1—5,000

字数190千字

ISBN 7-80093-286-9/C·318

定价：4.50元

前 言

“学则须疑”，有疑有解则能提高和进步。

学习是一个特殊的认识过程，是在教师帮助下加速对所学知识的认识过程。课堂学习时间是有限的，重要的是培养自学能力，以提高学习效果。自学时有了疑问和疑难怎么办！要靠无声的老师做辅导，这就是有益的——书。

为此，向大家奉献一套中小学课本中《重点问题详解》，一书在手，似教师陪坐身旁。

该书是以问题的形式出现的。因为一切科学都是从为什么开始的，且问题是启动思维的动力。所以，以问题的形式，贯穿全书是最有益的，它把学习中的重点、难点、疑点设计成问题，使读者一目了然，便于阅读和使用。

遇有疑难，请先思考，然后翻阅此书，认真阅读，即可生效。

本书的特点是：

一、源于课本，重点突出，解答详尽。

该丛书，随着课本进度，将所学内容的重难点和疑惑不解的问题，提出来做详尽的解答，并有例题，以帮助读者深刻理解，提高学习实效。

二、提出问题，文字精辟，促进思考。

该丛书，对所有重点问题，均以问题形式出现的。问题是思维的动力。你有问题可到该书中去找解，丛书中提出的问题，促你思考，然后阅读解答，使你从中得到提高。

三、应用知识，总结方法，提高能力。

提高能力，是学习的重要目的。该丛书根据课程的要求，及时总结学习方法和掌握应用知识的方法，以取得举一反三之效，促进读者学习能力的提高。

四、辞书性，题解性，兼而有之。

该丛书，具有辞书性和题解性。为了说明课本中的重点知识，在解答之中，则要博引例证，以丰富内容，可取辞书之效。遇有典型问题，解之详尽，故有题解功能。

编写这套丛书是一个大胆的尝试，虽然我们依据设想做了很多努力，但是不妥之处也还难免。欢迎广大读者批评指正。

目 录

《几何学》的研究对象是什么.....	1
什么是平面几何学.....	3
几何学的起源与发展.....	5
什么叫做直线.....	7
为什么两点确定一条直线.....	9
怎样进行推理论证(一)——归纳法.....	11
怎样进行推理论证(二)——演绎法.....	14
怎样进行推理论证(三)——反证法.....	19
怎样进行推理论证(四)——同一法.....	22
几何定理为什么需要证明.....	25
怎样确定命题的题设与结论.....	26
怎样得到一个命题的逆命题.....	29
为什么真命题的逆命题不一定是真命题.....	32
什么是“循环论证”.....	34
怎样画几何示意图形.....	36
怎样联系实际理解几何概念.....	38
怎样培养识别几何图形的能力.....	40
怎样准确使用几何语言.....	43
为什么会产生“漏解”的错误.....	45
怎样理解有关“角”的概念.....	49
“边、边、角”为什么不能判定两个三角形全等.....	51
怎样证明线段(或角)相等.....	53
怎样证明线段的和、差、倍、分.....	56

怎样证明线段(或角)的不等关系.....	60
“关于某直线成轴对称的图形”是“轴对称图形”吗.....	64
哪些图形既是轴对称图形,又是中心对称图形.....	65
什么是平移变换.....	68
什么是对称变换.....	71
什么是旋转变换.....	74
为什么不能忽视“三点共线”的重要地位.....	76
怎样证明“三点共线”.....	79
怎样利用平行四边形的性质证题.....	82
梯形有哪些常添加的辅助线.....	85
怎样证明一个四边形是梯形.....	88
怎样寻求最短路线.....	90
什么是几何作图题.....	93
解几何作图题的步骤是什么.....	96
怎样用“三角形奠基法”解几何作图题.....	98
等积变换有哪些应用.....	102
什么是勾股定理.....	106
怎样证明勾股定理.....	107
为什么要掌握勾股定理逆定理的多种证法.....	110
怎样确定“勾股数”.....	113
什么是几何计算题.....	116
怎样解有关余角和补角的计算题.....	119
怎样用内角和与外角和定理解题.....	121
为什么要重视“弦高公式”的应用.....	124
哪些几何命题宜用反证法.....	127
怎样用几何法作正有理数的平方根.....	129
怎样灵活运用等比性质解题.....	131

为什么要强调等比性质成立的条件.....	135
怎样判定四条线段是否成比例线段.....	136
什么是“黄金分割”.....	139
为什么说“黄金分割”是几何学中的瑰宝.....	142
怎样理解平行截线定理及其推论中的“对应线 段成比例”.....	144
怎样判定两直线平行.....	146
怎样证明“三角形内角平分线性质定理”.....	148
什么是“调和点列”.....	151
怎样判定两个三角形相似(一).....	154
怎样判定两个三角形相似(二).....	157
怎样证明三角形的“重心定理”.....	159
怎样利用三角形的重心解题.....	162
什么是射影、射影定理.....	164
相似三角形的性质有哪些应用.....	167
怎样利用三角形面积定理解题.....	169
怎样证明线段成比例.....	172
全等三角形与相似三角形有什么关系.....	174
什么是相似多边形.....	177
为什么要重视“相似比”的方向性.....	178
怎样证明相似多边形.....	181
车轮为什么是圆形的.....	183
为什么不在同一直线上的三点决定一个圆.....	184
怎样记忆和应用垂径定理.....	186
与圆有关的角是怎样形成的.....	188
怎样证明四点共圆.....	190
四点共圆有哪些应用.....	194
怎样证明三角形的三条高线交于一点.....	197

怎样利用三角形的垂心解题.....	199
怎样证明两线垂直.....	202
怎样证明直线和圆相切.....	204
“三等分角仪”的制作原理是什么.....	206
怎样确定圆形工件的圆心.....	208
怎样理解多边形与圆的“接”与“切”.....	209
为什么把“相交弦定理”与“切割线定理”称为 “圆幂定理”.....	212
怎样证明结论为“比例中项型”的几何题.....	215
怎样判定两圆的位置关系.....	218
为什么说“公共弦”是解决相交两圆问题的桥梁.....	219
怎样利用两圆的公切线证题.....	222
为什么正多边形都有一个外接圆和一个内切圆, 而且这两个圆是同心圆.....	225
怎样解正多边形的有关计算问题.....	227
怎样记忆弧长和扇形面积公式.....	230
为什么说“相等的弧”不一定是“等弧”.....	233
怎样解几何定值问题.....	234
为什么要倡导“一题多解”(一).....	237
为什么要倡导“一题多解”(二).....	240
怎样用“代数解析法”解几何作图题.....	244
什么是命题的“变位”与“变质”.....	247
怎样证明命题的“等价”与“不等价”.....	248
什么是点的轨迹.....	250
怎样探求点的轨迹.....	252
怎样证明点的轨迹.....	255
怎样利用“轨迹交接法”解几何作图题.....	258

《几何学》的研究对象是什么

在日常生活和生产实践中，对任何物体都有一个由表及里、由浅入深的认识过程。首先通过直接观察，可以看到物体的形状和颜色等外观；其次通过度量、计算，可以得到物体的长、宽、高、面积、体积、重量和比重等各种数据；最后通过各种实验方法，可以进一步识别物体的构成元素、味道、气味、可燃性、溶解性、弹性与范性等各种性质。

总之，人类为了满足日常生活和生产实践的需要，必须研究、掌握周围各种物体所具有的性质。在整个研究过程中，数学、物理、化学等各学科担负着不同的使命，几何学是数学的一门分科，研究的对象就是物体的形状、大小和相互的位置关系。这是在识别各种物体时最容易做到的，也是在日常生活和生产实践中必须予以考虑的。

例如各种螺母的形状一般是正六边形或正方形的。利用正六边形或正方形对边平行的性质，便于使用工具进行安装或拆卸；各种车辆的车轮一般是圆形的，利用圆心到圆上各点的距离相等的性质，保证车辆正常平稳地行驶；各种推拉门窗必须是平行四边形的结构，利用四边形的不稳定性，可使推拉门窗随意开关。（图1）

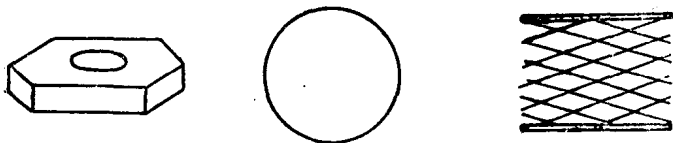


图 1

不难看出，物体的形状必须符合日常生活和生产实践的实际需要，至于物体的大小和相互位置关系，也必须从生活和生产的实际需要出发。

例如在皮带传送装置中，要控制主动轮和从动轮的旋转方向，必须选择传送带的安装方式，同向旋转（图2-(1)），异向旋转（图2-(2)）。要控制主动轮和从动轮的旋转速度，必须调整主动轮和从动轮的大小比例。

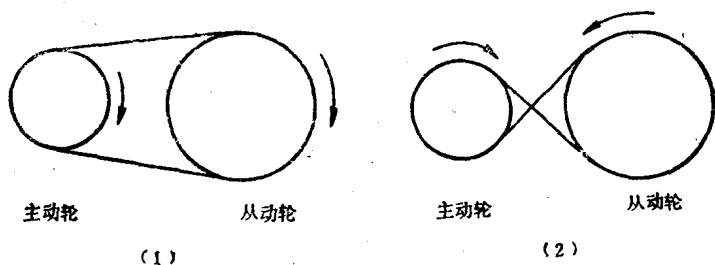


图 2

在齿轮传送装置中，要控制主动轮和从动轮的旋转方向，应适当选择安装方式，同向旋转（图3-(1)），异向旋转（图3-(2)）。要控制主动轮和从动轮的旋转速度，应适当调整主动轮和从动轮的大小比例。

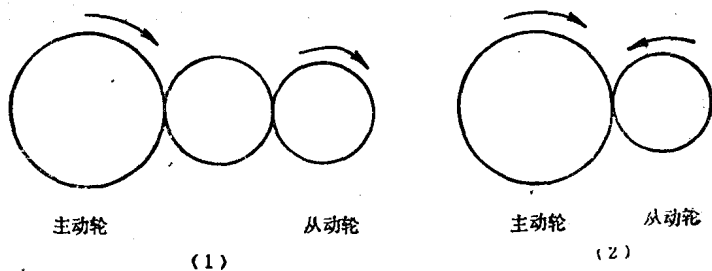


图 3

从宏观上看，无论是制造各种器具，还是在车间正确地安装机器；无论是修建房屋、建筑堤坝、还是在田间合理地装置排灌设备等，都要考虑到它们的形状、大小和确定它们的施工或安装位置。

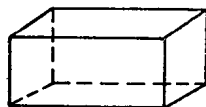
由此可见，《几何学》所研究的对象——物体的形状、大小和相互位置关系，在日常生活和生产实践中都有着较为广泛的应用。

什么是平面几何学

人们在日常生活和生产实践中所接触的各种物体，尽管它们的重量、颜色、气味、质料、硬度等各不相同，但是它们都有一定的形状。例如通过观察比较书本的封面、课桌面、黑板面和门窗的玻璃面等，可以抽象概括为“长方形”的概念(图4-(1))；通过观察比较火柴盒、文具盒、装收音机的纸盒和装衣物的木箱等，可以抽象概括为“长方体”的概念(图4-(2))。



(1)



(2)

图 4

对于一个物体，当只研究它的形状、大小，而不考虑其他物理、化学等性质时，我们就说它是“几何体”，几何体简称为“体”。

尽管书本的封面、课桌面、黑板面和门窗的玻璃面等是风马牛不相及的物体，它们的物理性质和化学性质也各不相同，但从几何学的角度来看，它们是同一种几何图形——长

方形。与此相同，火柴盒、文具盒、装收音机的纸盒和装衣物的木箱等则是同一种几何体——长方体。

体是由面围成的。例如长方体是由六个平的面围成的，圆柱体是由两个平的面和一个曲的面围成的(图5)。几何学里的面不同于生活中的面，生活中的面除了有长、宽和位置外，还有厚薄、质料等的区别，而几何学里的面是没有厚薄的，除了有一定的位置外，只有长、宽和面积。

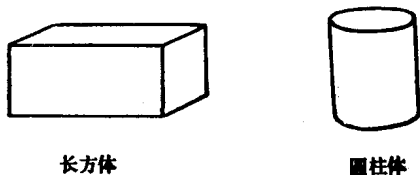


图 5

面和面相交于线。如长方体相邻两个面相交于一条直的线(长方体的棱)，圆柱体的侧面和一个底面相交于一条曲的线。几何学里的线不同于生活中的线，生活中的线除了长度和位置外，还有粗细、颜色等的区别，而几何学里的线是没有粗细之分的，除了有一定的位置外，只有长短。

线和线相交于点。例如长方体相邻的两条棱相交于一个点(长方体的顶点)。几何学里的点不同于生活中的点，生活中的点除了有一定的位置外，还有大小的区别，而几何学里的点只占有一个位置，而无长短、宽窄、大小、厚薄之分。

应当注意，几何学里的点、线、面都不能单独存在，只能依附于“几何体”。但是在几何学里为了研究它们的性质，以便更好地指导实践，才把它们分开来研究，这并不意味着点、线、面是互不相关的。

点、线、面是组成几何图形的三元素，所以，点、线、

面或若干个 点 、 线 、 面 组合在一起，就成为几何图形。几何图形分为两类，象三角形、长方形、梯形和圆等图形，都是在同一个平面内的图形，称为平面图形，而长方体、圆柱体和球体等图形都不是平面图形。

平面几何学是几何学中以平面图形为研究对象的一门基础学科。

平面几何学有以下三个主要特点：

(1) 它的基本知识在生产实践和科学研究中有较为广泛的应用，又是继续学习数学和其他学科的基础。

(2) 它的研究对象是学生日常生活中经常接触的、比较熟悉的内容，这些知识形象直观，便于被初中学生所接受，又可以培养学生的空间想象能力。

(3) 它的研究方法可以比较系统地培养学生的逻辑思维能力。

几何学的起源与发展

相传几何学起源于古代埃及的测地术，古代埃及的尼罗河每年洪水泛滥把两岸的土地淹没，水退后河床常有变易，致使土地界线不清，当地农民必须重新勘定田界，画出耕地的图形，并计算它们面积的大小，作为重新划分土地的依据。由于经常的测量和画图，不断地积累和提高测量土地的方法，测地术就成为西方几何学的源流。

后来，希腊人到埃及去经商，埃及的几何知识渐渐地传入希腊，这些几何知识经希腊人的逐步充实成为一门完整的几何学。他们认为研究物体的形状、大小和相互位置关系的科学，是从测量土地开始的，因此把这门科学叫做“土地测量”。

希腊伟大的数学教育家欧几里得（公元前330~275年）

把前人积累起来的几何知识作了系统的总结和整理，按比较严格的逻辑系统编成《几何原本》一书，它根据公理、公设和定义来论证其他命题，可以说《几何原本》是公理法的源泉。从此，几何学成为一门独立的学科。两千多年来的初等几何教科书，几乎都是从《几何原本》演变而成的。现代，人们把这个几何体系称为《欧几里得几何学》。

我国明末徐光启翻译欧几里得的《几何原本》时，兼顾音译和意译，用了“几何”两字，测量土地都要计算出结果是多少，“几何”就是“多少”的意思，此外，几何的读音多少和Geometry等外文读音有些近似，几何这个名词一直沿用到现在。

我国古代对图形的认识和形的观念的形成起源很早，几何知识已达到很高的程度，在大量的出土文物中，有很多几何图形，从山西省襄汾县丁村出土的几万年前的球形石器工具看出，当时已经有了球的概念。一万多年前的资阳人和“山顶洞人”磨制的工具中有球、圆、圆柱体、平行平面等几何形体。云南省云县忙怀新石器时代遗址中的石器上有纵横交叉的方格纹，以及西安半坡出土的彩陶器上的几何图案中的平行线、折线、三角形、菱形等，都充分表明六千年前，我们的祖先已经能够绘制平面几何中的大多数直线形了。

我国古代数学发展的很早，在世界上占有领先地位。例如在《周髀算经》中记述了周公（公元前1120年左右）同商高的一段对话：“故折矩，此为勾广三、股修四、经隅五”。也就是通常说的“勾三、股四、弦五”。希腊数学家毕达哥拉斯首次发现这一定理比我国晚500多年。在《九章算术》中记载了大量关于面积、体积的计算问题，其中的“勾股”一章为勾股定理的应用以及直角三角形、相似三角形中的各种比例关系。魏晋时期杰出的数学家刘徽所作《九章算术注》（公元263

年)创造了“割圆术”，把圆周率 π 的值计算到3.14124，他附在《九章算术》后面的《九章重差图》，已经将简单的测量推进到利用四对相似三角形的复杂测量了。当时，这类测量问题在比较先进的古希腊也只限于一次测望，直到15、16世纪，欧洲著作中也只有两次测望的简单问题。比刘徽稍早或同时代的人赵爽，曾利用图形来证明各种几何题，如在为《周髀算经》所附的《勾股圆方图》下所加的注中，已用弦图证明了勾股定理，伟大的科学家祖冲之（公元429—500年）求得圆周率在3.1415927和3.1415926之间。祖冲之的儿子首先发现了“祖暅原理”，并利用这个原理巧妙地求出了球体体积的精确公式。

我国数学研究在几何学上的成就，为世界数学史增添了光辉的篇章。随着科学的发展，几何学的研究对象也在逐渐增加，新的几何分支如远交几何学、射影几何学、保角几何学等相继形成。勤劳智慧的中华儿女，应继承中华民族优良传统，发奋图强，为世界几何学的发展作出新的贡献。

什么叫做直线

研究任何对象，都必须从掌握对象的概念开始，再进一步研究有关的判定和性质，因为概念是思维的最基本的形式，是推理的依据，是反映事物本质属性的词语。例如直线、射线、线段和角等都是平面几何学中的基本概念。

数学的概念一般都是用定义来给它作出严格规定的，给概念下定义就是用简明的语言，描述、刻划概念的本质属性。对一个概念的研究、探讨，完全以它的定义作为依据，换句话说，理解了某一概念的定义就基本上掌握了这个概念。

例如射线的定义是：在直线上某一点一旁的部分叫做射线。角的定义是：有公共端点的两条射线所组成的图形叫做

角。角平分线的定义是：从一个角的顶点引出的一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线。（图6）

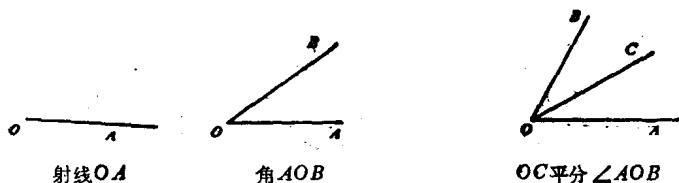


图 6

以上3个概念的定义形象准确地揭示了射线、角和角的平分线的本质属性，也是进一步研究与这些概念有关知识的出发点。同时可以看出，每一个数学概念的定义必须依赖前面的已知概念，又是给其他概念下定义时的依据。具体地说，角的定义是依赖于“射线”的概念建立的，而角的概念又是给角的平分线下定义时的依据。那么射线的定义又是依赖于哪些概念建立的呢？从“在直线上某一点一旁的部分叫做射线”易知，射线的定义必须依赖于直线和点的概念，而直线和点的定义又是依赖于哪些概念呢？如此追根寻源，那么至少有一个概念是不能依赖于别的概念下定义的。这些不能依赖于别的概念下定义的概念，在数学上称为原始概念（或基本元素）。原始概念本身是不能被定义的，但它们是给其他概念下定义的基础，几何学里的“点”、“直线”、“平面”，都是不能被定义的原始概念。

既然原始概念没有定义，那么如何反映原始概念的本质属性呢？一般是结合实例描述它的形状，如一根拉紧的线、一张纸的折痕、透过一小孔的光线等，都给我们以直线的形象。（图7）