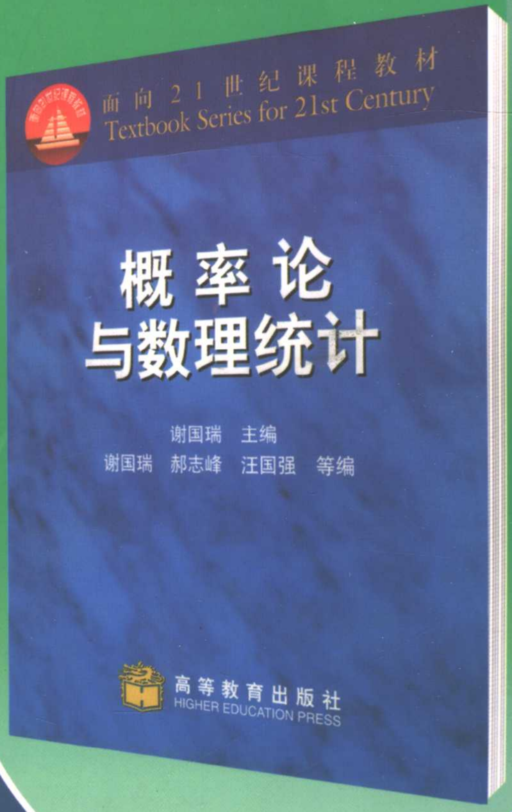
高等学校优秀教材辅导丛书

GAO DENG XUE XIAO YOU XIU JIAO CAI FU DAO CONG SHU

主编 安玉伟 朱 捷 王佳秋

概率论与数理统计

知识要点与习题解析



哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计知识要点与习题解析/安玉伟,朱捷,王佳秋主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005
ISBN 7-81073-703-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①安…②朱…③王… Ⅲ.概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第061223号

内 容 简 介

本书与高等教育出版社的《概率论与数理统计》(谢国瑞主编)教材同步配套,全书共八章,内容包括:基本概念、基本定理、离散型随机变量、连续型随机变量、多维随机变量、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。每章由知识要点、书后习题解析、同步训练题三个部分组成。

本书为大学本科概率论与数理统计的辅导书,适用于非数学专业的大学本科生。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈尔滨工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省教育厅印刷厂印刷

*

开本 787mm×960mm 1/16 印张 12.75 字数 230 千字
2005年7月第1版 2005年7月第1次印刷
印数:1—3 000 册
定价:16.50元

前言

概率论与数理统计是工科数学的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。为帮助广大学生更好地把握概率论与数理统计的知识要点，巩固基本概念，加深对基本理论的理解，提高学生应用知识分析问题、解决问题的能力，我们精心编写了这本书。

本书与高等教育出版社的《概率论与数理统计》（谢国瑞主编）教材同步。编写过程中，作者精选典型例题，归纳解题规律、方法和技巧，因此该书对于启迪思维，开发智力，提高能力及加深对概率论与数理统计的理解都是大有益处的。

本书共八章，前五章是概率论部分，包括：第 1 章基本概念，第 2 章基本定理，第 3 章离散型随机变量，第 4 章连续型随机变量，第 5 章多维随机变量；后三章是数理统计部分，包括：第 6 章数理统计的基本概念，第 7 章参数估计，第 8 章假设检验。每章分为知识要点、书后习题解析、同步训练题三个部分。

本书第 1 章、第 2 章、第 3 章由安玉伟编写，第 4 章、第 5 章由王佳秋编写，第 6 章、第 7 章、第 8 章由朱捷编写。哈尔滨工程大学数学系施久玉教授主审了全书。

由于作者水平有限，时间仓促，本书难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 7 月

Contents

目录

Contents

第1章 基本概念

知识要点

1.深刻理解随机试验、样本空间和随机事件的概念,熟练掌握事件之间的关系与事件的运算;

2.弄清频率与概率的关系;

3.掌握古典概型的概率定义及计算.

1.1 随机试验

具有如下特点的试验称为随机试验:

① 试验可以在相同的条件下重复地进行;

② 试验的可能结果不止一个,但能明确知道其所有可能出现的结果;

③ 在每次试验前,不能确知这次试验的结果,但可以肯定,试验的结果必是所有可能结果中的某一个.

1.2 随机事件

1.2.1 概念

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω(或 S).样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点,记为 ω.

试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件,简称事件.在每次试验中,当且仅当某一子集 A 中的一个样本点出现时,称事件 A 发生.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件.样本空间 Ω 包含所有样本点,在每次试验中它总是发生,称为必然事件.空集 $\varnothing$ 中不包含任何样本点,在每次试验中都不发生,称为不可能事件.

1.2.2 事件的关系及运算

1.事件之间的四种关系

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A \subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互不相容关系	$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(但能同时不发生)	A 与 B 无公共元素

2.事件之间的三种运算

运算	符号	概率论	集合论
事件的并	$A \cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
(或称和)	$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$	事件 $A_1,\cdots,A_n$ 至少有一个发生	$A_1,\cdots,A_n$ 的并集
事件的交	AB (或 $A \cap B$)	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
(或称积)	$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$	事件 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生	$A_1,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A - B$	事件 A 发生时 B 不发生	A 与 B 的差集

注意 ① 在一次试验中,基本事件都是两两互不相容的;

② 若 A,B 互不相容,则 $A \cup B = A + B$;

③ 对立事件一定是互不相容的,但互不相容事件不一定是对立事件.

1.2.3 常用的事件间的关系式

①$A \cup B = B \cup A, AB = BA$. (交换律)

②$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$. (结合律)

③$(A \cup B)C = AC \cup BC, (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$. (分配律)

④$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}; \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. (对偶律)

⑤$\varnothing \subset A \subset \Omega$.

⑥若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B, AB = A$.

⑦$A + \varnothing = A, A + \Omega = \Omega, A\varnothing = \varnothing, A \cap \Omega = A$.

⑧$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B, A \supset AB, B \supset AB$.

⑨$A \cup B = A + (B - AB) = B + (A - B) = B + A\overline{B} = A + B\overline{A}$

$= AB + A\overline{B} + \overline{A}B$.

⑩ $\overline{A} = \Omega - A, \overline{\overline{A}} = A, A - B = A\overline{B}$.
⑪ 若 $A \subset B$,则$\overline{A} \supset \overline{B}$.
⑫ 若 $A \subset B$,则 $B = A \cup (B - A)$.

1.3 频率与概率

1.3.1 频率的定义

在相同条件下,随机事件 A 在 n 次试验中发生的次数 ν_A 称为事件 A 发生的频数,比值$\frac{\nu_A}{n}$称为事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)$.

频率的基本性质:

①$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

②$f_n(\Omega) = 1$;

③ 如果 A 与 B 互不相容,则 $f_n(A + B) = f_n(A) + f_n(B)$;若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i)$$

④ 若 $A \subset B$,则 $f_n(A) \leqslant f_n(B)$.

1.3.2 概率的统计定义

在一个随机试验中,若事件 A 出现的频率$\frac{m}{n}$随着试验次数 n 的增大,在区间 $[0,1]$ 上的某个常数 p 附近摆动,则定义事件 A 的概率为 $P(A) = p$.

1.3.3 概率的古典定义

若样本空间由一组有限个两两互不相容且等可能的基本事件组成,则称这种"等可能"的数学模型为古典概型.在古典概型情况下,事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{所包含的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点总数}}$$

1.3.4 概率的几何定义

若将随机试验解释成向一个区域 Ω 随机投点,且任意一点落在度量(长度、面积和体积)相同的子区域是等可能的,则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{\Omega_A}{\Omega}$$

式中,Ω 为样本空间的度量,Ω_A 为构成事件 A 的子区域的度量.

注意 计算古典概率时,要弄清样本空间是怎样构成的,判断有限性和构成样本空间的每个基本事件的出现一定要具有等可能性;否则,将会导致错误的结果.

1.3.5 基本计数方法

1.加法原理

设完成一件事情有 n 类方法,只要选择任何一类方法中的一种方法就可以完成.若第一类方法有 m_1 种,第二类方法有 m_2 种……第 n 类方法有 m_n 种,并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法中任何两种都不相同,那么完成这件事共有 $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

2.乘法原理

设完成一件事须有 n 个步骤(仅当 n 个步骤都完成,才能完成这件事),若第一步有 m_1 种方法,第二步有 m_2 种方法……第 n 步有 m_n 种方法,则完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法.

注意 加法原理与乘法原理的区别,前者完成一步即完成一件事,后者需 n 步均完成才能完成一件事.

3.排列

从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个,按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列总数记为

$$A_n^m=n(n-1)\cdot\cdots\cdot[n-(m-1)]=\frac{n!}{(n-m)!}$$

从 n 个不同元素中全部取出的排列称作全排列,其排列的总数记为

$$A_n^n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1=n!$$

规定 $0!=1$.

4.允许重复的排列

从 n 个不同元素中有放回地取 m 个元素,按照一定顺序排列成一列,其排列的总数为

$$N=\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{m\text{个}n}=n^m$$

5.不全相异元素的排列

若 n 个元素中有 m 类 $(1<m\leqslant n)$ 本质不同的元素,而每类元素中分别有 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 个元素 $(k_1+k_2+\cdots+k_m=n;1<k_i<n;i=1,2,\cdots,m)$,则 n 个元素全部取出的排列称作不全相异元素的一个全排列,其排列的总数为

$$N = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

6.组合

从 n 个元素中取出 m 个元素,不管其顺序合并成一组,称作从 n 个不同元素中取出的一个组合,其组合总数记为 C_n^m,且

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质:

① $C_n^m = C_n^{n-m}$;

② $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

注意 排列与组合不同,前者与次序有关,后者与次序无关.

SHU HOU XI TI JIE XI 书后习题解析

1.试对下列随机试验各写出一个样本空间:

(1) 掷一颗骰子;

(2) 一个口袋中有 5 个外形相同的球,编号分别为 1,2,3,4,5,从中同时取出 3 个球;

(3)10 只产品中有 3 只是次品,每次从其中任取一只(取出后不放回),直到将 3 只次品全部取出,记录抽取的次数;

(4) 对某工厂生产的产品进行检查,合格的盖上"正品",不合格的盖上"次品",如果查出 2 件次品就停止检查,或者查满 4 件产品也停止检查,记录检查结果.

解 (1) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

(2) $\Omega = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$

(3) $\Omega = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(4) 用数字"1"代表正品,数字"0"代表次品,则

$$\Omega = \{(0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\}$$

2.工厂对一批产品做出厂前的最后检查,用抽样检查方法,约定:从这批产品中任意取出4件产品来做检查,若4件产品全合格就允许这批产品正常出厂;若有1件次品就再做进一步检查;若有 2 件次品则将这批产品降级后出厂;若有 2 件以上

次品就不允许出厂.试写出这一试验的样本空间,并将“正常出厂”、“再做检查”、“降级出厂”、“不予出厂”这4个事件用样本空间的子集表示.

解 $\Omega=\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1),$
$(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),$
$(0,0,1,1),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,0)\}$

若将这些样本点依次表示成 $\omega_1\sim\omega_{16}$,则有

$$A=\text{“正常出厂”}=\{\omega_1\}$$

$$B=\text{“再做检查”}=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$$

$$C=\text{“降级出厂”}=\{\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10},\omega_{11}\}$$

$$D=\text{“不予出厂”}=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{16}\}$$

3.设 A,B,C 是三个事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 与 B 都发生,但 C 不发生;

(2) A 发生,但 B 与 C 可能发生也可能不发生;

(3) 这三个事件都发生;

(4) 这三个事件都不发生;

(5) 这三个事件中至少有一个发生;

(6) 这三个事件中最多有一个发生;

(7) 这三个事件中至少有二个发生;

(8) 这三个事件中最多有二个发生;

(9) 这三个事件中恰有一个发生;

(10) 这三个事件中恰有二个发生.

解 (1) $AB\overline{C}$,或 $AB-C$;

(2) A;

(3) ABC;

(4) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(5) $A\cup B\cup C$,或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$,或$\overline{AB\cup BC\cup AC}$;

(7) $AB\cup AC\cup BC$,或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(8) $\overline{ABC}$,或$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$;

(9) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(10) $AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$,或 $AB\cup AC\cup BC-ABC$.

4.设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,$C=\{4,5,6\}$,试用 Ω 的子集表出下列事件:

(1) $\overline{A}B$;(2) $\overline{A}\cup B$;(3) $\overline{B-A}$;(4) $\overline{A\overline{BC}}$;(5) $\overline{A(B\cup C)}$.

解 (1) 因为$\overline{A}=\{4,5,6\}$,所以$\overline{A}B=\{4\}$;

(2) $\overline{A}\cup B=\{2,3,4,5,6\}$;

(3) 因为 $B-A=\{4\}$,所以$\overline{B-A}=\{1,2,3,5,6\}$;

(4) 因为$BC=\{4\}$,$\overline{BC}=\{1,2,3,5,6\}$,$A\overline{BC}=\{1,2,3\}$,所以$\overline{A\overline{BC}}=\{4,5,6\}$或$\overline{A\overline{BC}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{BC}}=\overline{A}\cup BC=\{4,5,6\}$;

(5) 因为 $B\cup C=\{2,3,4,5,6\}$,$A(B\cup C)=\{2,3\}$,所以$\overline{A(B\cup C)}=\{1,4,5,6\}$.

5.对三个任意给定的事件 A,B,C:

(1) 试化简$(A\cup B)(B\cup C)$;

(2) 试将 $A\cup B\cup C$ 表成互不相容事件之和.

解 (1)
$$\begin{aligned}(A\cup B)(B\cup C)&=((A\cup B)B)\cup((A\cup B)C)\\&=B\cup(AC\cup BC)\\&=(B\cup BC)\cup AC=B\cup AC\end{aligned}$$

(2) $$(A-AB)+(B-BC)+(C-AC)+ABC$$

6.指出下列各题是否正确(提示:可借助文氏图):

(1)$A\cup B=A\overline{B}\cup B$;　　(2) $\overline{A}B=A\cup B$;

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;　　(4)$AB(A\overline{B})=\varnothing$;

(5) 若 $A\subset B$,则 $A=AB$;　　(6) 若 $AB=\varnothing$,$C\subset A$,则 $BC=\varnothing$;

(7) 若 $A\subset B$,则$\overline{B}\subset\overline{A}$;　　(8) 若 $B\subset A$,则 $A\cup B=B$.

解 画出(1)~(6)题的文氏图,如图1-1所示.从(1)~(6)题的文氏图可以看出(1),(4),(5),(6)题是正确的,(2),(3)不正确.

当 $A\subset B$ 时,若 B 不发生,则 A 必定不发生,即$\overline{B}\subset\overline{A}$,所以(7)正确.当 $B\subset A$ 时,$A\cup B=A$,所以(8)不正确.

7.对投掷一对均匀骰子的试验,可给出两个样本空间 Ω 和Ω_1 如下:Ω 是由第一颗骰子与第二颗骰子出现点数的对子组成的,有

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

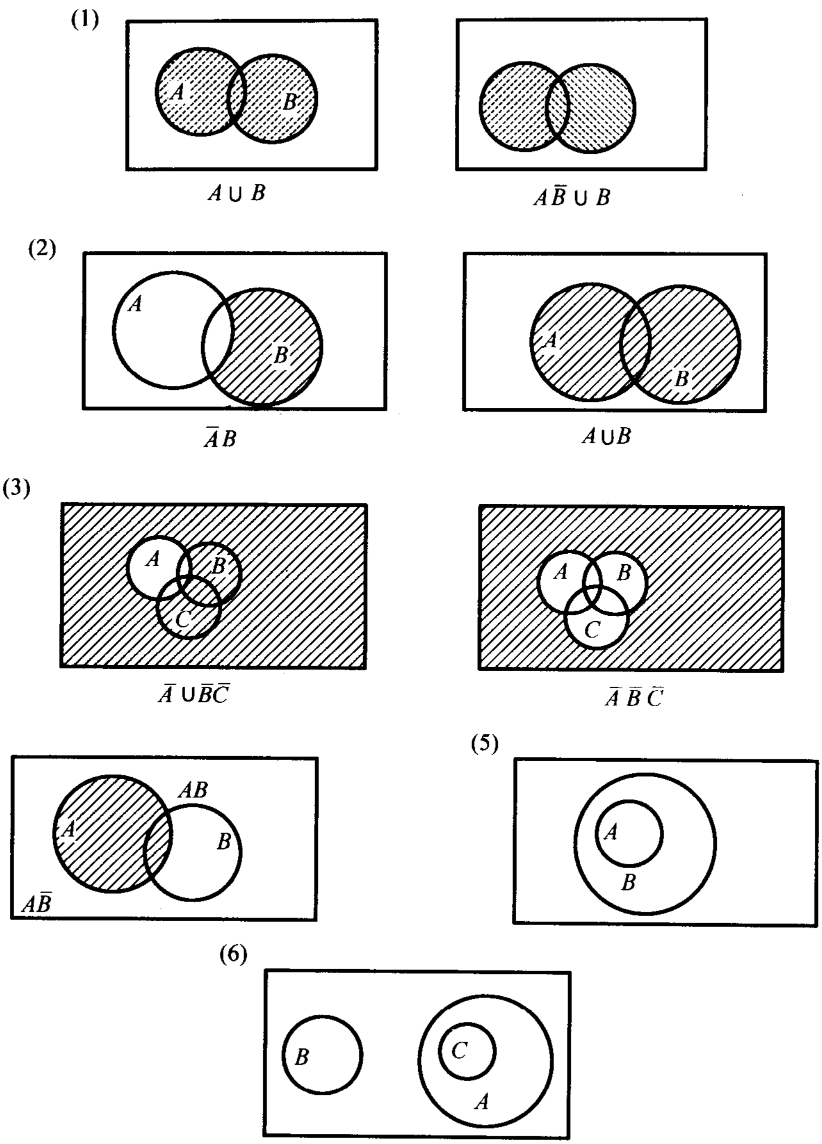


图 1 - 1

而 Ω_1 由两颗骰子出现点数之和组成，有 $\Omega_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

在求出现“点数之和等于 7”的概率 p 时，依 Ω 计算得 $p=6/36=1/6$；依 Ω_1 计

算得 $p = 1/11$,试分别解释得此结果的依据,哪一个结果正确?怎样理解这一正确结果?

解 这两个结果都是依古典概率公式算得的.因骰子是均匀的,故每次投掷出现哪一个点数均应是等可能的,所以有理由认为样本空间 Ω 的样本点具有等可能性.在样本空间 Ω 中,"点数之和等于7"这一事件包含(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)共6个样本点,Ω 共有36个样本点,据此用古典概率公式算出的结果 $p = 6/36 = 1/6$ 是正确的.

依 Ω_1 计算得 $p = 1/11$,同样也用了古典概率公式,Ω_1 中共有11个样本点,而点数之和等于7,只有1个样本点,所以得 $p = 1/11$.但是,对于 Ω_1 而言,样本点不具有等可能性,例如样本点"2",包含"第一个骰子掷出一点、第二个骰子掷出一点"一个试验结果,而样本点"7"包含6个试验结果.

8.假设发现了一颗不均匀的骰子,由于它,使得在进行掷一对骰子的试验时,在上题的样本空间 Ω 中出现偶数和(如(1,1),(1,3),…)的次数比奇数和(如(2,1),(2,3),…)的次数多一倍,求下列事件的概率:

(1) 点数和小于6;(2) 点数和等于8;(3) 点数和是偶数.

解 将一颗骰子不均匀出现的偶数和的试验结果记为"(1′,1′),…,(6′,6′)等,则样本空间为

$$\Omega = \left\{\begin{array}{cccccc}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\
(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\
(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\
(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\
(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\
(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \\
(1',1'), & (1',3'), & (1',5'), & (2',2'), & (2',4'), & (2',6') \\
(3',1'), & (3',3'), & (3',5'), & (4',2'), & (4',4'), & (4',6') \\
(5',1'), & (5',3'), & (5',5'), & (6',2'), & (6',4'), & (6',6')
\end{array}\right\}$$

样本点总数为54,其中:

(1)"点数和小于6"的样本点数为14个,故"点数和小于6"的概率为14/54;

(2)"点数和等于8"的事件包含10个样本点,故"点数之和等于8"的概率为10/54;

(3)"点数和是偶数"事件包含36个样本点,故"点数和是偶数"的概率为36/54.

9.某人忘记了一个电话号码的最后一位数字,因此只能试着随意地拨这位数,

试求他拨号不超过三次就能接通电话的概率是多少?若记得最后一位是奇数,则此概率又是多少?

解 此人必定在十次之内接通此号码,将此十次看做是10个箱子,编号为1,2,…,10.把正确的号码看做一个球,此球置于第 n 号箱子中,表示此人拨 n 次才能接通电话,球的放置方法共10种.以 A 表示"不超过三次就能接通电话"这一事件,则 A 的有利场合就是将球置入前三个箱子中,共有三种,故 $P(A)=3/10=0.3$.

若记得最后一位是奇数,则多只需拨五次就能接通电话.故样本点总数为5,$P(A)=3/5=0.6$.

10.房间中有4个人,试问没有2个人的生日在同一个月份的概率是多少?

解 概率为 $p=C_{12}^{4}/12^{4}$.

11.从1,2,3,4,5这五个数字中等可能地、有放回地接连抽取三个数字,试求下列事件的概率:$A=\{$三个数字全不相同$\}$,$B=\{$三个数字中不含1或5$\}$,$C=\{$三个数字中5出现了两次$\}$.

解 从五个数字中等可能、有放回地接连取三个数字,共有 $5\times5\times5=125$ 种取法.事件 A 的有利场合可以这样计算:第一次可以从1,2,…,5中任取一个数,共有五种取法,第二次只能从其余四个数中任取一个,有四种取法,第三次有三种取法,故 A 的有利场合共有 $5\times4\times3=60$ 种取法,则 $P(A)=60/125=0.48$.事件 B 的有利场合为:第一次从2,3,4三个数中任取一个,共有三种方法,同理第二次、第三次各有三种方法,故事件 B 的有利场合共有 $3\times3\times3=27$ 种取法,所以 $P(B)=27/125=0.216$.事件 C 的有利场合为:由于5出现了两次,另一个数只能从1,2,3,4这四个数字中任取一个,有四种取法,这个数可能在第一次或第二次或第三次中的某一次取到,故 C 的有利场合共有 $4\times3=12$ 种取法,所以 $P(C)=12/125=0.096$.

12.将十本不同的书放置到一个空书架上,求其中指定的某三本书恰好放在一起的概率.

解 设此事件为 A,其样本空间中的样本点为十本不同书的任一种可能的排列,样本点总数为 $n=10!$.A 的有利场合可以这样计算:先将指定的三本书看做一本书与其他七本书放在一起排列,共有$(7+1)!$种排列方法,这三本书有 $3!$ 种不同的排列顺序,所以 A 的有利场合为 $3!\cdot8!$,故

$$P(A)=\frac{3!\cdot8!}{(10)!}=\frac{6}{10\times9}\approx0.067$$

13.将3个球放置到4个盒子中去,求下列事件的概率:

(1)A 是没有一个盒子里有2个球;(2)B 是3个球全在一个盒子内;

解 将盒子与球都编号处理,这样,盒子与盒子、球与球都看做是不同的.其

样本空间中的样本点总数为 4^3.

(1) A 的有利场合的计算方法为:先从4个不同的盒子中任取3个,有 $C_4^3=4$ 种取法,将3个球放在这三个盒子中,有 $3!=6$ 种方法,故 A 的有利场合为 $4\times 6=24$ 种方法,所以 $P(A)=24/4^3=4!/4^3=0.375$;

(2) B 的有利场合计算方法为:从4个盒子中取出一个,共有4种取法.故 $P(B)=4/4^3=0.0625$.

14. 教室内10个人分别佩戴着编号从1号到10号的校徽,现从中任选3人并记录其校徽的号码,试求下列事件的概率:(1) 最小号码是5;(2) 最大号码是5.

解　从1到10这十个数中任取三个一组作为样本空间中的样本点,共 C_{10}^3 种取法,各种情况的有利场合的计算方法为:

(1) 由于最小号码是5,其余两个数只能从6,7,…,10这五个数中任取2个为一组,有 C_5^2 种方法,故有利场合为 C_5^2,所以 $P(A)=C_5^2/C_{10}^3=0.083$.

(2) 若最大号码为5,则其余两个号码只能从1,2,3,4这四个数中任取2个,共有 C_4^2 种取法,故此种情况的概率为 $P(B)=C_4^2/C_{10}^3=0.05$.

15. 盒中有6只灯泡,其中2只次品,4只正品,现从中有放回地抽取二次(每次取出一只),求下列事件的概率:

(1) A 是二次抽到的都是次品;(2) B 是一次抽到正品,另一次抽到次品.

解　该试验的样本空间中的样本点总数为 6^2(可参考教材17页中例11的解释).

(1) 由于二次抽到的都是次品,且为有放回抽样,每次只能从2只次品中抽取,故 A 的有利场合为 2^2,所以 $P(A)=2^2/6^2=0.11$.

(2) 抽到正品共有4种可能,抽到次品共2种可能,可能第一次抽到正品,也可能第二次抽到正品,故 B 的有利场合为 $4\times 2\times 2=16$,所以 $P(A)=\dfrac{4\times 2\times 2}{6^2}=0.44$.

16. 将上题改为无放回抽取二次后(相当于一次抽取,取2个),再计算这些事件的概率.

解　在无放回抽样时,样本空间的样本点总数为 C_6^2,A 的有利场合总数为 C_2^2,$P(A)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=0.067$,$B$ 的有利场合总数为 $C_4^1\cdot C_2^1$,$P(B)=\dfrac{C_4^1\cdot C_2^1}{C_6^2}=0.533$.

17. 一公司批发出售服装,每批100套.公司估计某客商欲购的那批100套服装中有4套是次品,12套是等级品,其余是优质品,客商在进货时要从中接连抽出2套做样品检查,如果在样品中发现有次品,或者2套都是等级品,客商就要退货.试求下列事件的概率: