复变函数

FUBIAN HANSHU

蒋月评
李丹衡 编
刘楚中

湖南大學出版社

复 变 函 数

蒋月评　李丹衡　刘楚中　编

湖 南 大 学 出 版 社
2005 年 · 长沙

内容提要

本书根据《复变函数课程教学基本要求》编写，主要内容包括复数、复变函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射等. 为了帮助读者对复变函数的基本概念和基本定理的理解，除了习题外，本书的每一章节中，都配备了适量的思考题.

本书可供高等工科院校各专业的师生作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/蒋月评，李丹衡，刘楚中编．
—长沙：湖南大学出版社，2005. 1
ISBN 7-81053-883-7
Ⅰ.复...　Ⅱ.①蒋...②李...③刘...　Ⅲ.复变函数—高等学校—教材　Ⅳ.O174.5
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 134586 号

复变函数
Fubian Hanshu

蒋月评　李丹衡　刘楚中　编
责任编辑：厉　亚
特约编辑：彭亚新
封面设计：张　毅
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编**：410082
电　　话：0731-8821691(发行部)，8821315(编辑室)，8821006(出版部)
传　　真：0731-8649312(发行部)，8822264(总编室)
电子邮箱：press@hnu.net.cn
网　　址：http://press.hnu.net.cn
印　　装：长沙环境保护学校印刷厂
总 经 销：湖南省新华书店
开本：850×1168　32 开　**印张**：9.25　**字数**：216 千
版次：2005 年 1 月第 1 版　**印次**：2005 年 1 月第 1 次印刷　**印数**：1~6 000 册
书号：ISBN 7-81053-883-7/O·57
定价：14.00 元

前　言

复变函数理论创立于19世纪，历史悠久，发展成熟．由于复变函数理论既是微分方程、计算数学和概率论等数学分支的主要解析方法，又在空气动力学、流体力学、弹性力学、电磁学和热力学等学科中有着广泛的应用，因此，复变函数一直是大学数学教育的重要内容之一．

本书按照《复变函数课程教学基本要求》编写，内容涵盖解析函数、柯西积分理论、级数理论、留数定理、共形映射、解析开拓和解析函数的应用等．本书在内容的取舍上，力求做到简洁、严谨．对一些较难的内容或超过要求的内容，以 * 号表示．本书可作为高等理工学校非数学专业复变函数课程的教学用书．

本书的每一章都以一句数学家的名言开始，希望这些先辈的名言能给读者以鼓励和鞭策．在每一章节中，我们适当地编写了一些思考题，这些思考题是本书正文的延伸．我们试图让读者通过对这些问题的理解与解答，更好地掌握复变函数的基本概念和一些基本技巧．另外，在某些章节，本书编写了一些曾经为复变函数的创建作出过贡献的数学家的简介，读者可以从他们的生平简介中，简单地了解复变函数的发展过程．

本书第一、第二、第三章由刘楚中编写，第四、第五、第六章由蒋月评编写，第七、第八章由李丹衡编写．

本书的编写工作得到湖南大学教务处的专项经费的资助，编者在此深表感谢．借此机会，编者对湖南大学数学与计量经济学院各位同行和湖南大学出版社为本书的出版所作出的努力表示感谢．

编　者

2004年11月

目　次

第五章 留数

第六章 共形映射

第七章 解析开拓

第八章 解析函数的应用

第一章　复　数

$\sqrt{-1}$的真正奥妙是难以捉摸的.

Gauss

第一节　复数及其代数运算

1. 复数的概念

i是我们在初等代数中就熟悉了的虚数单位，它具有性质 $i^2=-1$，通常记 $i=\sqrt{-1}$. 运用加法和乘法将虚数单位 i 与两个实数 x,y 组合起来，就可得到一个复数 z：$z=x+yi$，其中，x 称为复数 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}(z)=x$；y 称为复数 z 的虚部，记为 $\mathrm{Im}(z)=y$（Re 和 Im分别来自法文 relle 和 imaginaire）.

当复数 z 的虚部 $\mathrm{Im}(z)=y=0$ 时，z 实际上就是一个实数 x，即 $z=x$；当复数 z 的实部 $\mathrm{Re}(z)=x=0$ 时，它是一个纯虚数 yi：$z=yi$. 零是可以同时作为实数与纯虚数的唯一数.

两个复数相等，是指它们的实部和虚部分别对应相等，即

$$z_1=z_2\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2),$$

或

$$z_1=z_2\Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2.$$

复数 $z=0$ 等价于它的实部和虚部同时为零：

$$z=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=0,$$

复数 $z\neq 0$，则 $\mathrm{Re}(z)$ 与 $\mathrm{Im}(z)$ 中至少有一个不为零，或 $(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2\neq 0$.

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的反号数记为 $-z$：$-z=-x-y\mathrm{i}$.

复数与实数不同：任意两个复数不能比较大小.

由所有的复数所构成的集合，称为复数集，显然，实数集是复数集的子集，故当建立复数的基本代数运算时，我们必须要求：一方面，对于实数应用这些运算所得到的结果，要跟在实数的代数学中所得到的结果相同；另一方面，所建立的基本代数运算，要符合实数的代数学中的一般公理.

2. 复数的加法与乘法

设有复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$，则复数的加法、乘法定义如下：

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})+(x_2+y_2\mathrm{i}) \\ &= (x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i}, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

容易看出，只需注意 $\mathrm{i}^2=-1$，则复数的加法和乘法实际上是按照代数中加法和乘法来实施的，这表示对复数所定义的加法与乘法运算和实数中的相应运算没有矛盾.

由定义容易验证复数的加法、乘法运算遵循下列五个基本法则：

(1) 加法交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$；

(2) 乘法交换律：$z_1z_2=z_2z_1$；

(3) 加法结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$；

(4) 乘法结合律：$z_1z_2z_3=z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$；

(5) 乘法对加法的分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

建议读者自己去验证这些法则的正确性.

复数对加法与乘法运算是封闭的，即运算的结果仍是复数.此外，

$z+0=z$;

$z_1z_2=0 \Leftrightarrow z_1$ 和 z_2 至少有一个为零.

3. 复数的减法与除法

减法和除法视作为加法与乘法的逆运算.

若复数β满足等式

$$z_1+\beta=z_2,$$

则称β为复数z_2与z_1的差,记为$\beta=z_2-z_1$.

在等式$z_1+\beta=z_2$两边加上$-z_1$,则有$z_1+\beta+(-z_1)=z_2+(-z_1)$,即

$$\beta=z_2+(-z_1)=(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\mathrm{i},$$

也就是

$$z_2-z_1=(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\mathrm{i}. \tag{1.1.3}$$

设有复数$z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$,$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$,且$z_1\neq 0$,若存在复数$\beta=\xi+\eta\mathrm{i}$,使得$z_1\beta=z_2$成立,则称β为z_2与z_1的商,记为$\beta=\dfrac{z_2}{z_1}$.

由

$$z_1\beta=(x_1+y_1\mathrm{i})(\xi+\eta\mathrm{i})=(x_1\xi-y_1\eta)+(x_1\eta+y_1\xi)\mathrm{i}$$

及$z_1\beta=z_2$,得

$$\begin{cases} x_1\xi-y_1\eta=x_2, \\ y_1\xi+x_1\eta=y_2, \end{cases}$$

已知$z_1\neq 0$,即有$x_1^2+y_1^2\neq 0$,故解此关于ξ和η的二元一次方程组,得

$$\xi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}, \qquad \eta=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2},$$

故 $\beta=\xi+\eta\mathrm{i}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}\mathrm{i}$,从而

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{x_2+y_2\mathrm{i}}{x_1+y_1\mathrm{i}}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1y_2-x_2y)\mathrm{i}}{x_1^2+y_1^2}. \tag{1.1.4}$$

4. 复共轭

在推出复数的加法和乘法时，我们只用到了一个事实：$\mathrm{i}^2=-1$. 由于$-\mathrm{i}$也具有同样的性质：$(-\mathrm{i})^2=-1$，因此，将所有复数中的 i 均换成$-\mathrm{i}$，则容易验证上面给出的运算规则仍保持有效. 例如，

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1(-\mathrm{i}))(x_2+y_2(-\mathrm{i}))\\&=x_1x_2+y_1y_2(-\mathrm{i})^2+x_1y_2(-\mathrm{i})+x_2y_1(-\mathrm{i})\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)(-\mathrm{i}).\end{aligned}$$

我们称将 $x+y\mathrm{i}$ 换成 $x-y\mathrm{i}$ 的变换为复共轭，而称 $x+y\mathrm{i}$ 与 $x-y\mathrm{i}$ 为一对共轭复数，$z=x+y\mathrm{i}$ 的共轭复数记为 $\bar{z}=x-y\mathrm{i}$.

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的实部 $\mathrm{Re}(z)$ 和虚部 $\mathrm{Im}(z)$ 可用 z 及其共轭复数 $\bar{z}$ 来表示：

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

由复数的乘法可知：$z\bar{z}=(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})=x^2+y^2$. 此外，由于

$$\begin{aligned}\bar{z}_1z_2&=(x_1-y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i})\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1y_2-x_2y_1)\mathrm{i},\end{aligned}$$

而当 $z_1\neq0$ 时，由(1.1.4)式有

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{x_2+y_2\mathrm{i}}{x_1+y_1\mathrm{i}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}\mathrm{i},$$

即有

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\bar{z}_1z_2}{z_1\bar{z}_1}. \tag{1.1.5}$$

复数 $z=x+y\mathrm{i}\neq 0$ 时，称满足等式 $z\cdot\alpha=1$ 的复数 α 为 z 的倒数，记为 $\alpha=\frac{1}{z}$. 此时，由(1.1.5)式立即得到 $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}$.

容易验证共轭复数具有以下性质：

$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；

$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；

$\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\ (z_1\neq 0)$；

$\bar{\bar{z}}=z$；

$z=\bar{z}\Leftrightarrow z$ 为实数；

$z\cdot\bar{z}=(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$.

如果将每一个复数都用它的共轭复数来代替，则关于复数的那些两端包含着加、减、乘、除运算的方程依旧成立，就是说，令 $R(z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n)$ 表示施于复数 $z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n$ 的任一有理运算，则

$$\overline{R(z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n)}=R(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3,\cdots,\bar{z}_n).$$

思考题：若 ξ 是方程

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$$

的一个根，则 $\bar{\xi}$ 必是方程

$$\bar{c}_0z^n+\bar{c}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{c}_{n-1}z+\bar{c}_n=0$$

的一个根.

由上面的思考题可知，如果方程 $c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$ 的系数均为实数，则 ξ 与 $\bar{\xi}$ 必同是该方程的根. 由此得到熟知的定理：实系数方程的非实数根必以成对的共轭复根出现.

例1　化简 $\sqrt{1+2\mathrm{i}x\sqrt{x^2-1}}$，其中 x 为实数，且 $|x|\geqslant 1$.

解 令$\sqrt{1+2\mathrm{i}x\sqrt{x^2-1}}=a+b\mathrm{i}$,则

$$\left(\sqrt{1+2\mathrm{i}x\sqrt{x^2-1}}\right)^2=(a+b\mathrm{i})^2,$$

即有 $$1+2\mathrm{i}x\sqrt{x^2-1}=a^2-b^2+2ab\mathrm{i},$$

因此 $$a^2-b^2=1,\quad ab=x\sqrt{x^2-1},$$

联立方程组,解之得 $a=\pm x, b=\pm\sqrt{x^2-1}$,

从而,原式可化简为

$$\sqrt{1+2\mathrm{i}x\sqrt{x^2-1}}=\pm\left(x+\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\right).$$

例 2 证明:若 $z+\dfrac{1}{z}$ 为实数,则有 $\mathrm{Im}(z)=0$,或者 $z\bar{z}=1$.

证 设 $z=x+y\mathrm{i}$,由于$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{x^2+y^2}$,故

$$\begin{aligned}z+\frac{1}{z}&=x+y\mathrm{i}+\frac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2}\\&=\frac{x(x^2+y^2+1)+y(x^2+y^2-1)\mathrm{i}}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

已知 $z+\dfrac{1}{z}$为实数,则必有

$$\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}=0,$$

即有 $y=0$ 或 $x^2+y^2=1$. 这就证明了若 $z+\dfrac{1}{z}$为实数,有 $\mathrm{Im}(z)=0$,或者 $z\bar{z}=1$.

例 3 设 $z=x+y\mathrm{i}$,求$\sqrt{z}$ 及$\sqrt{\mathrm{i}}$.

解 设$\sqrt{z}=\alpha+\beta\mathrm{i}$,则$(\sqrt{z})^2=(\alpha+\beta\mathrm{i})^2$,即有

$$x+y\mathrm{i}=(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta\mathrm{i},$$

由此得到方程组

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=x,\\ 2\alpha\beta=y,\end{cases}\tag{1.1.6}$$

从而，有 $x^2=(\alpha^2-\beta^2)^2, y^2=4\alpha^2\beta^2$，于是

$$x^2+y^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2,$$

故

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由 $\alpha^2-\beta^2=x$，得

$$\alpha^2=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2}),\tag{1.1.7}$$

$$\beta^2=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2}),\tag{1.1.8}$$

从而，$\alpha=\pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$，$\beta=\pm\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$. 但是，因为(1.1.6)式中的第二式并不是(1.1.7)式和(1.1.8)式的结果. 因此必须谨慎选择 α 与 β，使其积与 y 同号. 于是得到一般解

$$\sqrt{x+y\mathrm{i}}=\pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+\mathrm{i}(\operatorname{sgn} y)\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right),$$

其中，$\operatorname{sgn} y=\begin{cases}1, & y>0,\\ 0, & y=0,\\ -1, & y<0.\end{cases}$

由于 $x=0, y=1$ 时，$z=x+y\mathrm{i}=\mathrm{i}, \operatorname{sgn} y=1$，故

$$\sqrt{\mathrm{i}}=\pm\left.\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+\mathrm{i}(\operatorname{sgn} y)\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right)\right|_{x=0,y=1}$$

$$=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

例 4 用复数表示圆的方程 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$，其中，a,b,c,d 为实常数，且 $a\neq0$.

解　令 $z=x+y\mathrm{i}$,则有

$$x^2+y^2=z\bar{z},\qquad x=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad y=\frac{z+\bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

代入圆的方程中,得到圆的方程的复数表示形式

$$az\bar{z}+\frac{1}{2}(b-c\mathrm{i})z+\frac{1}{2}(b+c\mathrm{i})\bar{z}+d=0.$$

习　题　1-1

1. 设 z_1,z_2,z 为复数,证明:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;　　(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}=\dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}(z_1\neq 0)$;　　(4) $\bar{\bar{z}}=z$;

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$;　　(6) $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

2. 设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y$ 为实数),写出下列各数的实部和虚部:$\dfrac{1}{z^2}$,$\dfrac{z-1}{z+1}$,z^2.

3. 已知 $(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$,求复数 z.

4. 计算下列各式:

(1) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$;　　(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}$;

(3) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4$;　　(4) $\left(\dfrac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3-1$.

第二节　复数的几何表示

1. 复数的几何表示法

学习微积分时我们知道,平面上建立直角坐标系后,平面上的任意一点 M_0 均与一对有序实数 (x_0,y_0) 一一对应,并且点

M_0 也与向径 $r_0=\overrightarrow{OM_0}$ 一一对应.

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可以视为由一对有序实数唯一确定：$z=(x,y)$. 因此，可以用在平面上以横轴表示实数，以纵轴表示纯虚数的直角坐标系来表示复数. 建立了这种坐标系的平面称为复平面，通常按表示复数的字母来称呼复平面，例如，z 平面，w 平面等. 在复平面上，横轴称为实轴，纵轴称为虚轴，两坐标轴的交点称为坐标原点；实轴位于坐标原点右边的部分称为正实轴，在正实轴上的复数满足 $\mathrm{Re}\, z>0$，$\mathrm{Im}\, z=0$；实轴位于坐标原点左边的部分称为负实轴，在负实轴上的复数满足 $\mathrm{Re}\, z<0$，$\mathrm{Im}\, z=0$；虚轴位于坐标原点上方的部分称为上半虚轴，在上半虚轴上的复数满足 $\mathrm{Re}\, z=0$，$\mathrm{Im}\, z>0$；虚轴位于坐标原点下方的部分称为下半虚轴，在下半虚轴上的复数满足 $\mathrm{Re}\, z=0$，$\mathrm{Im}\, z<0$. 位于实轴上方的半平面称为上半平面，在上半平面上的复数满足 $\mathrm{Im}\, z>0$；位于实轴下方的半平面称为下半平面，在下半平面上的复数满足 $\mathrm{Im}\, z<0$；位于虚轴右方的半平面称为右半平面，在右半平面上的复数满足 $\mathrm{Re}\, z>0$；位于虚轴左方的半平面称为左半平面，在左半平面上的复数满足 $\mathrm{Re}\, z<0$.

与微积分学中一样，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 与 z 平面（复平面）上的点 $M(x,y)$ 一一对应，也与 z 平面上以坐标原点为起点，以点 M 为终点的向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 一一对应（图 1-2-1）. 因此，我们常常将复数与点和向量、复数集与点集和向量集视为同义语. 复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的实部 x 和虚部 y 就是向量 $\boldsymbol{r}$ 分别在实轴和虚轴上的投影.

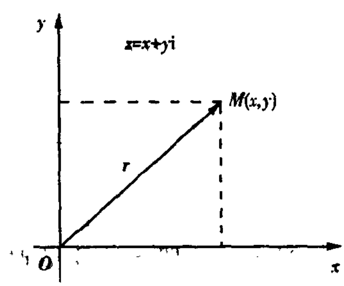

图 1-2-1

2. 复数的加法、减法的几何意义

为了给复数 z_1 与 z_2 的加法以几何意义，我们用对应的向量来表示它们. 根据复数加法运算法则可知，两个复数 z_1 与 z_2 的加法运算与相应的向量的加法运算一致. 图 1－2－2 表示了复数 z_1 与 z_2 的加法运算的平行四边形法和三角形法.

由于 $z_2-z_1=z_2+(-z_1)$，所以，求复数 z_2 与 z_1 的差，只要按照平行四边形法或三角形法求 z_2 与 $-z_1$ 的和即可.

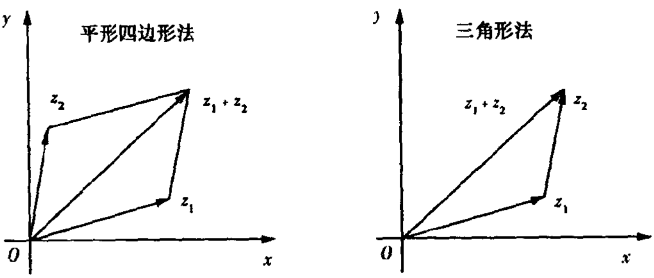

图 1－2－2

3. 复数的三角形式与指数形式

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 所对应的向量 $\boldsymbol{r}$ 的长度称为复数 z 的模，记为 $|z|$（图 1－2－3）：

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}. \tag{1.2.1}$$

显然，$|\mathrm{Re}\ z|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}\ z|\leqslant|z|$. 当 $y=0$，即 z 为实数时，$|z|$ 就是实数 z 的绝对值.

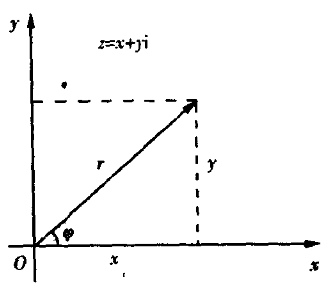

图 1－2－3

复平面上，以正实数 $a>0$ 为半径，以坐标原点为中心的圆周上的点所表示的数都具有相

同的模 a，该圆周的方程可表示为 $|z|=a$.

由复数的模、复数加减法的几何表示及向量运算性质，可以得出以下各式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||,$$
$$\mathrm{Re}\, z\leqslant|\mathrm{Re}\, z|\leqslant|z|,$$
$$\mathrm{Im}\, z\leqslant|\mathrm{Im}\, z|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|,$$
$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|=(\mathrm{Re}\, z)^2+(\mathrm{Im}\, z)^2.$$

在图 1-2-3 中，φ 表示由 x 轴的正向转到与向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向一致时所成的角度，我们规定：当转动是逆时针方向，所成的角为正值；当转动是顺时针方向，所成的角为负值，φ 称为复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的幅角. 显然，$\tan\varphi=\dfrac{y}{x}$.

每一个复数 $z\neq0$ 的幅角有无穷多个值，它们彼此间相差 2π 的整数倍，即若 φ 为复数 z 的幅角，则 $\varphi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 都是 z 的幅角. 记复数 z 的全部幅角为

$$\mathrm{Arg}\, z=\varphi+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z}).\tag{1.2.2}$$

$\mathrm{Arg}\, z$ 中只有一个值 φ_0 满足 $-\pi<\varphi_0\leqslant\pi$，称之为 z 的幅角主值，记为 $\varphi_0=\arg z$. 显然，

$$\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z},-\pi<\arg z\leqslant\pi).\tag{1.2.3}$$

今后我们也将 $\mathrm{Arg}\, z$ 的任一确定的值记作 $\arg z$.

位于坐标原点的数 0 是唯一的以零为模的复数，它的幅角被视为不确定.

由几何学可知，图 1-2-3 中 $r=|z|$ 与 φ 是点 (x,y) 的极坐标：