5647819
69151956990
009(%^)

高等学校教学用书

数学规划及其应用

（第2版）

3749507462890
00043257

7895105715781571105
74810500_76189

范玉妹 徐尔 周汉良 编著

1
234
45
85
21
8800
00
7963
64
9
%

87502+(3421%
hu78921057

4
56
5
111
008
963
64
56

冶金工业出版社

高等学校教学用书

数学规划及其应用

(第2版)

范玉妹　徐　尔　周汉良　编著

冶金工业出版社

2003

内 容 简 介

本书主要论述了线性规划、整数规划、非线性规划、多目标规划和动态规划等内容，并介绍了一些成功的应用实例。为便于自学，各章后面都附有习题。

本书可作为高等学校工科专业本科生及研究生的教学用书，也可供高职高专学校有关师生参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学规划及其应用/范玉妹等编著．—2版．—北京：冶金工业出版社，2003.8

高等学校教学用书

ISBN 7-5024-3299-X

Ⅰ．数…　Ⅱ．范…　Ⅲ．数学规划－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O221

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第048207号

出版人　曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）

责任编辑　王秋芬　美术编辑　李　心　责任校对　王永欣　责任印制　李玉山

北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

1995年12月第1版，2003年8月第2版，2003年8月第3次印刷

850mm×1168mm　1/32；14印张；375千字；440页；3901～6900册

21.00元

冶金工业出版社发行部　电话：（010）64044283　传真：（010）64027893

冶金书店　地址：北京东四西大街46号（100711）　电话：（010）65289081

（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

第1版前言

数学规划是运筹学的一个重要组成部分，它是近几十年里发展起来的一门新兴学科。随着电子计算机的普及与发展，它在自然科学、社会科学、工程技术和现代管理中得到了广泛的应用，日益受到人们的重视。

本书分六章论述了数学规划的主要内容：线性规划、整数规划、非线性规划、多目标规划、动态规划和网络规划，最后一章则介绍了数学规划一些成功的应用实例。本书是编者在为大学本科生和研究生讲授《运筹学》课程多年的基础上经过修改和补充完成的。本书第一、二、六章由周汉良编写，第三、四、五章由范玉妹编写，第七章由刘胜富编写。

我们在编写本书时力求深入浅出，通俗易懂，并列举了大量的实例。只要具有高等数学、线性代数知识的读者都可以读懂。在取材上，着重介绍了数学规划的基本理论和基本方法，并注意了这些理论和方法的应用。对于一些较复杂的数学推导及证明，作了适量的删减。在计算方法方面，着重介绍了适用面较广、使用方便、具有实效的方法，并力求反映先进成果。鉴于目前计算机已成为运筹学应用中不可缺少的工具，本书特别注意对各种算法都给出了计算框图和算法步骤，使其更具实用的价值。本书每章后面都附有习题，便于自学。

本书可作为大专院校工科各专业教材，也可以作为研究生的教学参考书。

在本书出版之际，谨向曾经给予我们帮助指导的邓乃扬、诸梅芳教授表示衷心谢意。

由于编者水平所限，书中错误或不妥之处在所难免，敬请广大读者给予批评指正。

编　者

1994年12月

第 2 版前言

本书的第 1 版自 1994 年出版以来，我们采用它作为教材，已经经过了多次的教学实践，积累了一些经验。这次我们根据在实践中积累的经验，并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见，将它的部分内容作了修改，成为第 2 版。

这次修订，我们修改了第 1 版中存在的不当之处，并致力于教材质量的提高。考虑到使用本书的读者知识的广度与深度，对第一章中的部分内容作了删减，对第三章的内容作了部分调整与增加，对第二、四、五章内容也作了少量的变动，删除了第六章的内容，将其归属到我们编写的《运筹学通论》教材中。此外，针对运筹学的特点，增加了部分应用案例及相应的习题。

在本书第 2 版出版之际，谨向关心本书和对本书第 1 版提出宝贵意见的同志们表示深切的谢意。同时，由于编者水平所限，书中仍难免有不妥之处，敬请广大读者给予批评指正。

编　者

2003 年 3 月

目　录

第一章　线性规划

线性规划是理论和方法都比较成熟，并且具有广泛应用的一个运筹学分支，特别是 1947 年 G. B. Dantzing 提出了单纯形法之后，线性规划的理论与应用都得到了极大的发展. 线性规划所探讨的问题，是在由所提出问题的性质决定的一系列约束条件下，如何把有限的资源进行合理分配，制订出最优实施方案以获得最好的效益，它具有适应性强，计算技术比较简便等特点.

第一节　线性规划问题的数学模型

一、实例

［例 1-1］　生产组织与计划问题

某电视机厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的电视机. 这三种电视机的市场需要量，每天最少分别为 200、250、100 台，而该厂每天可利用的工时为 1000 个时间单位，可利用的原材料每天有 2000 个单位. 生产一台各种型号的电视机所需的工时和原材料单位数量如表 1-1 所示. 问各种型号电视机每天应生产多少台，才能使该厂获得最大利润.

表 1-1　工时和原材料的需要量

型　号	原 材 料	工　时	最低需要量/台	利　润
Ⅰ	1.0	2.0	200	10
Ⅱ	1.5	1.2	250	14
Ⅲ	4.0	1.0	100	12
可利用量	2000	1000		

令 x_i 为第 i 型($i=$ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ)电视机每天的生产量.

求利润最大，即求

$$\max S = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

根据表 1-1 的已知条件，x_j 应满足如下的约束条件：

$$\text{s.t.}[1] \quad \begin{aligned} x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 &\leqslant 2000 (\text{原材料约束}) \\ 2x_1 + 1.2x_2 + x_3 &\leqslant 1000 (\text{工时约束}) \end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 200, x_2 \geqslant 250, x_3 \geqslant 100$$

[例 1-2]　运输问题

某类物资有 m 个产地，n 个销地. 第 i 个产地的产量为 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$；第 j 个销地的需要量为 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$，其中 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. 设由第 i 个产地到第 j 个销地运送单位物资的运价为 c_{ij}. 问如何制订调运方案，方可既满足供需关系，又使总运费最少.

用双下标变量 x_{ij} 表示由第 i 个产地供给第 j 个销地的物资数量. 由上述问题可归结为如下的数学问题：求一组非负变量 x_{ij}，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$，使总运费最小，即

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

且满足约束条件

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

[例 1-3]　饮食问题

在保证健康的起码营养条件下，如何确定最经济的饮食？假定在市场上可以买到几种不同的食品，并且第 i 种食品的单位售价是 c_i. 有 m 种基本营养成分，为达到饮食平衡，每个人每天必须至少保证 b_j 个单位的第 j 种营养成分. 假定第 i 种食品的每个单位含有 a_{ij} 个单位的第 j 种营养.

[1] s.t. 是 subject to 的缩写，意为约束条件.

用 x_i 表示在饮食中使用第 i 种食品的单位数. 于是,这个问题就是选择 x_i, $i=1,2,\cdots,n$,使总成本最小,即

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

且满足营养要求:

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geqslant b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geqslant b_m \end{aligned}$$

食品数量显然应满足非负条件:

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0$$

[例 1-4] 扩建投资问题

某工厂只生产一种产品,工厂准备分四期扩建以增加生产能力,每期为一年.

已知每生产一个产品需费用 d 元,同时要耗费一个单位的生产能力. 每年生产的产品在下一年年初才有收益,每个产品创收 h 元. 产品的收益用于再生产和扩建投资.

在每年年初扩建生产能力的工程中,有两种方案可以采用:

A 方案:年初每投资 a 元,一年后可增加一个单位生产能力.

B 方案:年初每投资 b 元,两年后可增加一个单位生产能力.

现工厂在第一年年初有资金 D 元、生产能力 R 个单位. 工厂希望在第五年年初具有最多的生产能力,问四年内应如何安排生产和扩建投资计划? 试建立线性规划模型.

解 我们引进四组决策变量.

令 x_j 为第 j 年产品的产量;

y_j 为第 j 年积余的资金;

u_j 为第 j 年准备用方案 A 增加的生产能力;

v_j 为第 j 年准备用方案 B 增加的生产能力.

显然,每年安排生产和扩建计划时,应考虑工厂现有资金约束;同时在制定产品产量计划时,还应考虑现有生产能力的约束.

在第一年年初，工厂有资金 D 元和生产能力 R 个单位，故有约束：

$$cx_1 + au_1 + bv_1 + y_1 = D$$

$$x_1 \leqslant R$$

在第二年年初，工厂具有的资金数为 $y_1 + hx_1$，而生产能力除了原有的 R 个单位外，还应加上第一年使用方案 A 投资而在第二年年初可增加的生产能力 u_1，故有约束：

$$cx_2 + au_2 + bv_2 + y_2 = y_1 + hx_1$$

$$x_2 \leqslant R + u_1$$

在第三年年初工厂的资金数为 $y_2 + hx_2$，考虑到由于第一年采用方案 B 投资而在第三年年初可投入使用的生产能力为 v_1，故第三年年初的生产能力为

$$R + u_1 + u_2 + v_1$$

故有约束　$cx_3 + au_3 + bv_3 + y_3 = y_2 + hx_2$

$$x_3 \leqslant R + u_1 + u_2 + v_1$$

第四年年初我们不再考虑方案 B 来增加生产能力，所以不再引进变量 v_4. 因此有约束：

$$cx_4 + au_4 + y_4 = y_3 + hx_3$$

$$x_4 \leqslant R + u_1 + u_2 + u_3 + v_1 + v_2$$

在第五年年初工厂具有的生产能力为

$$R + \sum_{j=1}^{4} u_j + \sum_{j=1}^{3} v_j$$

于是，有如下线性规划模型：

$$\max f = \sum_{j=1}^{4} u_j + \sum_{j=1}^{3} v_j + R$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 \leqslant R$$

$$x_j \leqslant R + \sum_{k=2}^{j} (u_{k-1} + v_{k-2}), \quad j = 2,3,4$$

$$cx_1 + au_1 + bv_1 + y_1 = D$$

$$cx_j + au_j + bv_j + y_j = y_{j-1} + hx_{j-1}, \quad j = 2,3,4$$
$$v_0 = 0, \quad v_4 = 0$$
$$x_j \geqslant 0, \quad y_j \geqslant 0, \quad u_j \geqslant 0, \quad v_j \geqslant 0, \quad j = 1,\cdots,4$$

二、线性规划问题的数学形式

容易看出上述三个例子的共同点：它们都是求一组非负变量，这些变量在满足一定的线性约束条件下，使一个线性函数取得极值(极大或极小值)，这样的问题称为**线性规划问题**，用(LP)表示.我们可以把线性规划问题抽象为下列一般的数学模型：求一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，在约束条件下，

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\geqslant = \leqslant) b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\geqslant = \leqslant) b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\geqslant = \leqslant) b_m \\
& x_j \geqslant 0, \quad j \in J \subseteq \{1,2,\cdots,n\}
\end{aligned}$$

目标函数 $S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 达到极大或极小，其中 b_i, c_j 和 a_{ij}均为实常数，符号($\geqslant = \leqslant$)表示在三种符号中取一种.

上述线性规划的一般模型，都可以等价地转化成如下形式，称为**标准形式**：

$$\begin{aligned}
& \min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
& \text{s.t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \qquad\ \ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& \qquad\ \ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& \qquad\ \ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1-1}$$

式中　b_i, c_j 和 a_{ij}——实常数，且 $b_i \geqslant 0$；

x_j——要求的一组变量.

使用向量和矩阵符号，式(1-1)可以写成如下紧凑的形式：

$$\min S = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b} \tag{1-2}$$
$$\boldsymbol{X} \geqslant 0$$

式中,$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$;$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$;$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$.

实际的线性规划问题的数学模型,往往不是式(1-1)的标准形式.但我们用来求解线性规划的单纯形方法,仅仅能解标准形式的线性规划.因此,下面先讨论将各种不同形式的线性规划模型化为标准形式的方法.

(1) 将求极大化为求极小

若求 $\max S=\boldsymbol{CX}$,我们知道,$\boldsymbol{CX}$ 的极大等价于 $-\boldsymbol{CX}$ 的极小,故化为:

$$\min(-S)=-\boldsymbol{CX}$$

(2) 将不等式约束化为等式约束

① 对于小于等于型不等式

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \leqslant b_i$$

引进新变量 $y_i \geqslant 0$,将不等式化为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+y_i=b_i$$

其中 y_i 称为**"松弛变量"**.

② 对于大于等于型不等式

$$a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\cdots+a_{ln}x_n \geqslant b_l$$

引进新变量 $y_l \geqslant 0$,将不等式化为

$$a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\cdots+a_{ln}x_n-y_l=b_l$$

其中 y_l 称为**"剩余变量"**.

(3) 将自由变量化为非负变量

若在线性规划的数学模型中,有某个变量 x_k 没有非负的要求,则 x_k 称为**"自由变量"**,通过变换:

$$x_k=x'_k-x''_k,\ x'_k \geqslant 0,\ x''_k \geqslant 0$$

可将一个自由变量化为两个非负变量;或者设法在约束条件和目标函数中消去自由变量.

［例 1-5］ 将$\max S = x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geqslant 6 \\ x_2 \geqslant 0, x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

化为标准形式.

在这个问题中 x_1 是自由变量,设

$$x_1 = x'_1 - x''_1, x'_1 \geqslant 0, x''_1 \geqslant 0$$

同时把极大化为极小,第一个约束中引进松弛变量 y_1,第二个约束中引进剩余变量 y_2,则问题化为如下的标准形式:

$$\begin{aligned} &\min(-S) = -x'_1 + x''_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ &\text{s.t.} \quad x'_1 - x''_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 5 \\ &\qquad 2x'_1 - 2x''_1 + 3x_2 + x_3 - y_2 = 6 \\ &x'_1 \geqslant 0, \quad x''_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

也可以通过消去 x_1,将问题化成如下的标准形式:

$$\begin{aligned} &\min(-S) = -x_2 - 3x_3 + y_1 - 5 \\ &\text{s.t.} \quad x_2 + x_3 + 2y_1 + y_2 = 4 \\ &x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

第二节 基本概念和基本定理

一、基本概念

考虑线性规划问题:

$$\min S = \boldsymbol{CX} \tag{1-3}$$

$$(LP) \qquad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \tag{1-5}$$

定义 1-1 若 $\boldsymbol{X}$ 满足式(1-4)和式(1-5),则 $\boldsymbol{X}$ 称为(LP)的**可行解**,满足式(1-3)的可行解称为(LP)的**最优解**.(LP)的可行解的全体

$$D = \{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

称为(LP)的**可行域**.

在以后的讨论中，我们都假定 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m（自然 $m \leqslant n$）. 我们从 $\boldsymbol{A}$ 的 n 列中选出 m 个线性无关的列组成一个 m 阶矩阵. 为了表达方便起见，假定选择的是 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列，并且用 $\boldsymbol{B}$ 表示这个矩阵. 于是 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异的，称为（LP）的一个**基**. 我们之所以把 $\boldsymbol{B}$ 叫做基，是因为 $\boldsymbol{B}$ 由 m 个线性无关列组成. 这 m 个线性无关的列向量可以作为 m 维空间的一组基. 设 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，令

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$$

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{P}_{m+1}, \boldsymbol{P}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{P}_n)$$

即将 $\boldsymbol{A}$ 分解为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})$$

相应地把 $\boldsymbol{X}$ 分解为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{X}_N \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{X}_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_N = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{B}$ 的列称为**基列**，$\boldsymbol{X}_B$ 的分量称为**基变量**；$\boldsymbol{N}$ 的列称为**非基列**，$\boldsymbol{X}_N$ 的分量称为**非基变量**.

将式(1-4)改写为

$$\boldsymbol{AX} = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{X}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{BX}_B + \boldsymbol{NX}_N = \boldsymbol{b}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 非奇异，故有

$$\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N \tag{1-6}$$

即基变量用非基变量线性表示. 若令 $\boldsymbol{X}_N = \boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

定义1-2　$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 是式(1-4)的一个解，称为（LP）的关

于基 $\boldsymbol{B}$ 的**基本解**. 若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$,称 $\boldsymbol{B}$ 为**可行基**,这时,称 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$为$(LP)$的关于可行基 $\boldsymbol{B}$ 的**基本可行解**.

相应地将 $\boldsymbol{C}$ 分解为

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_B,\boldsymbol{C}_N)$$

其中

$$\boldsymbol{C}_B=(c_1,c_2,\cdots,c_m)$$
$$\boldsymbol{C}_N=(c_{m+1},c_{m+2},\cdots,c_n)$$

注意到式(1-6),目标函数 $S=\boldsymbol{CX}$ 也可以用非基变量线性表示:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{CX}&=(\boldsymbol{C}_B,\boldsymbol{C}_N)\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}\\ &=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{C}_B(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}_N)+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N\end{aligned}$$

整理得:

$$\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N \tag{1-7}$$

定理 1-1　最优性判别定理

对于(LP)的基 $\boldsymbol{B}$,若有 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$,且 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}$,则对应于 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解 $\boldsymbol{X}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^*\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$是$(LP)$的最优解,称为**最优基本可行解**,基 $\boldsymbol{B}$ 称为**最优基**.

证　因 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}_B,\boldsymbol{C}_N)-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})=(\boldsymbol{C}_B,\boldsymbol{C}_N)-(\boldsymbol{C}_B,\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})$

故

$$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\geqslant\boldsymbol{0}$$

则对一切可行解 $\boldsymbol{X}$,根据式(1-7),有

$$\boldsymbol{CX}\geqslant\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{CX}^*$$

因此,$\boldsymbol{X}^*$是最优解.

定义 1-3　若在基本解中至少有一个基变量为零,则这个解称为**退化解**.

我们注意到,在非退化的基本解中,基变量可以直接从这个解的非零分量辨认出来;而在退化的基本解中,零值基变量不容易辨

认.

二、基本定理

考虑标准形式的线性规划问题

$$\text{(LP)}\qquad \begin{aligned} &\min S = \boldsymbol{CX} \\ &\text{s.t.}\quad \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1-8}$$

式中 $\boldsymbol{A}$——$m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 m;

$\boldsymbol{C}$——n 维行向量;

$\boldsymbol{b}$——m 维列向量;

$\boldsymbol{X}$——n 维列向量.

引理 1-1 设 $\boldsymbol{X}$ 是(LP)的一个可行解,若 $\boldsymbol{X}$ 中非零分量所对应的列向量线性无关,则 $\boldsymbol{X}$ 是(LP)的一个基本可行解.

证 用 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的各列,即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$$

假定 $\boldsymbol{X}$ 中有 r 个分量大于零,不失一般性,设前 r 个分量大于零,已知它们所对应的列向量线性无关,显然,$r \leqslant m$.若 $r = m$,则 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m)$是(LP)的可行基,故 $\boldsymbol{X}$ 是关于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解;若 $r < m$,因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 m,故可以从 $\boldsymbol{A}$ 中剩下的后 $n - r$ 个列向量中找出 $m - r$ 个列向量,与 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_r$ 一起组成 m 个线性无关的列向量,它们构成(LP)的一个基,对应的变量有 r 个大于零,$m - r$ 个等于零,这就是一个退化的基本可行解.

定理 1-2 基本定理

对于式(1-8)的标准形式线性规划问题:

(1) 若存在一个可行解,则必存在一个基本可行解.

(2) 若存在一个最优解,则必存在一个最优基本可行解.

证 (1) 若存在一个可行解 $\boldsymbol{X} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,于是有

$$x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{b}$$

假定 $\boldsymbol{X}$ 中有 r 个分量大于零,不失一般性,设前 r 个分量大于零,则上式变为:

$$x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{P}_r = \boldsymbol{b} \tag{1-9}$$