

GONGKE SHUXUE FENXI JICHU XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

面向 21 世纪课程教材教学辅导书

# 工科数学分析基础 学习指导与习题解析

(上册)

孙清华 孙昊

归纳知识要点 提纲挈领

析疑难问题 深入浅出

◇演绎解题技巧 新颖独特

◇配套经典教材 学习必备

华中科技大学出版社

面向 21 世纪课程教材教学辅导书

# 工科数学分析基础

## 学习指导与习题解析

上册

孙清华 孙 昊

华中科技大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础 学习指导与习题解析·上册/孙清华 孙 昊  
武汉:华中科技大学出版社,2005年5月  
ISBN 7-5609-3371-8

- I. 工…
- II. ①孙… ②孙…
- III. 数学分析-高等学校-教学参考资料
- IV. O17

工科数学分析基础  
学习指导与习题解析·上册

孙清华 孙 昊

策划编辑:徐正达

责任编辑:徐正达 柯 贝

责任校对:吴 晗

封面设计:潘 群

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉正风图文照排中心

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:15.125

字数:366 000

版次:2005年5月第1版

印次:2005年5月第1次印刷

定价:21.50元

ISBN 7-5609-3371-8/O·346

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

## 内 容 简 介

本书是为面向 21 世纪课程教材、普通高等教育“九五”国家级重点教材《工科数学分析基础》(王绵森、马知恩主编)而编写的,可以作为普通高等学校高等数学和微积分课程的教学辅导书,是在校大学生和任课教师的必备参考书。本书分为上、下两册,上册内容包括映射、极限、连续,一元函数微分学及其应用,一元函数的积分学及其应用,无穷级数。本书对《工科数学分析基础》的知识要点作了提纲挈领式的归纳,对习题作了全面的解答(题前标有符号“·”),并补充了部分典型例题,这些对读者提高数学素养和知识内涵、提高数学思维和运算能力是十分有益的。本书是使每个读者都能感受到开卷有益的一本好书。

## 前 言

普通高等教育“九五”国家级重点教材、面向 21 世纪课程教材《工科数学分析基础》(王绵森、马知恩主编)是高等学校工科对数学知识要求较高专业的一门数学基础课教材,它为大学生提高数学素养与能力,今后更新数学知识、学习现代数学方法奠定了良好的基础。与一般工科学习的高等数学教材相比,《工科数学分析基础》具有理论性更强、知识覆盖更广、内涵更深刻等特点,因而方法与应用更为复杂,习题难度也更大,学起来也更感困难。本书就是为了指导读者如何学好《工科数学分析基础》的内容,帮助读者切实掌握解题的思路、方法与技巧而编写的一本学习辅导书,它将成为您的良师益友。

本书主要依照《工科数学分析基础》编写,提纲挈领地归纳了该教材的知识要点,分析、解答了该书绝大部分习题(题前标符号“·”),另外补充了相当数量的典型例题。为了帮助读者解决学习理论中的困难,在“疑难解析”中对教材中不易理解的概念与学习中可能出现的问题作了诠释、分析和解答。

为了使本书能更好地为读者服务,我们特别注重了如下几点:第一,对教材的习题进行了细致求解,尽量避免错漏;对例题进行了精选,补充了原教材习题的不足,并在文字与解题过程方面下了不少功夫,读者阅读起来会更觉流畅、明白、易懂。第二,对方法、技

巧进行了归纳、评点,使读者通过学习能领会实质、融会贯通。第三,深入浅出地解析疑难问题,以帮助读者更好地理解教材内容、认识问题的本质。

本书是由孙清华、孙昊共同完成的。

本书能以全新的面貌与读者见面,应感谢华中科技大学出版社的大力支持。

孙清华 孙昊

2005年2月

# 目 录

<b>第一章 映射,极限,连续</b> .....	(1)
<b>第一节 集合与实数集</b> .....	(1)
知识要点 .....	(1)
疑难解析 .....	(3)
典型例题与习题详解 .....	(4)
<b>第二节 映射与函数</b> .....	(14)
知识要点.....	(14)
疑难解析.....	(15)
典型例题与习题详解 .....	(16)
<b>第三节 数列的极限</b> .....	(24)
知识要点.....	(24)
疑难解析.....	(25)
典型例题与习题详解 .....	(26)
<b>第四节 函数的极限</b> .....	(46)
知识要点.....	(46)
疑难解析.....	(48)
典型例题与习题详解 .....	(49)
<b>第五节 无穷小量与无穷大量</b> .....	(63)
知识要点.....	(63)
疑难解析.....	(64)
典型例题与习题详解 .....	(65)
<b>第六节 连续函数</b> .....	(76)
知识要点.....	(76)
疑难解析.....	(77)

典型例题与习题详解 .....	(78)
综合练习题 .....	(90)
<b>第二章 一元函数微分学及其应用 .....</b>	<b>(93)</b>
<b>第一节 导数的概念 .....</b>	<b>(93)</b>
知识要点 .....	(93)
疑难解析 .....	(94)
典型例题与习题详解 .....	(94)
<b>第二节 求导的基本法则 .....</b>	<b>(105)</b>
知识要点 .....	(105)
疑难解析 .....	(106)
典型例题与习题详解 .....	(107)
<b>第三节 微分 .....</b>	<b>(129)</b>
知识要点 .....	(129)
疑难解析 .....	(130)
典型例题与习题详解 .....	(131)
<b>第四节 微分中值定理及其应用 .....</b>	<b>(139)</b>
知识要点 .....	(139)
疑难解析 .....	(140)
典型例题与习题详解 .....	(142)
<b>第五节 Taylor 定理 .....</b>	<b>(162)</b>
知识要点 .....	(162)
疑难解析 .....	(164)
典型例题与习题详解 .....	(164)
<b>第六节 函数性态的研究 .....</b>	<b>(176)</b>
知识要点 .....	(176)
疑难解析 .....	(178)
典型例题与习题详解 .....	(180)
综合练习题 .....	(207)



<b>第三章 一元函数积分学及其应用</b> .....	(211)
<b>第一节 定积分的概念、存在条件与性质</b> .....	(211)
知识要点 .....	(211)
疑难解析 .....	(213)
典型例题与习题详解 .....	(214)
<b>第二节 微积分基本公式与基本定理</b> .....	(227)
知识要点 .....	(227)
疑难解析 .....	(229)
典型例题与习题详解 .....	(230)
<b>第三节 两种基本积分法</b> .....	(240)
知识要点 .....	(240)
疑难解析 .....	(241)
典型例题与习题详解 .....	(243)
<b>第四节 定积分的应用</b> .....	(278)
知识要点 .....	(278)
疑难解析 .....	(280)
典型例题与习题详解 .....	(280)
<b>第五节 几类简单的微分方程</b> .....	(303)
知识要点 .....	(303)
疑难解析 .....	(304)
典型例题与习题详解 .....	(305)
<b>第六节 反常积分</b> .....	(330)
知识要点 .....	(330)
疑难解析 .....	(333)
典型例题与习题详解 .....	(334)
综合练习题 .....	(354)
<b>第四章 无穷级数</b> .....	(358)
<b>第一节 常数项级数</b> .....	(358)

知识要点 .....	(358)
疑难解析 .....	(361)
典型例题与习题详解 .....	(362)
第二节 函数项级数 .....	(390)
知识要点 .....	(390)
疑难解析 .....	(392)
典型例题与习题详解 .....	(395)
第三节 幂级数 .....	(415)
知识要点 .....	(415)
疑难解析 .....	(419)
典型例题与习题详解 .....	(421)
第四节 Fourier 级数 .....	(446)
知识要点 .....	(446)
疑难解析 .....	(448)
典型例题与习题详解 .....	(449)
综合练习题 .....	(474)

# 第一章 映射, 极限, 连续

## 第一节 集合与实数集

### 知识要点

#### 一、集合及其运算

1. 集合是指具有某种确定性性质的对象的全体, 组成集合(简称集)的各别对象称为该集合的元素(简称元).

含有限个元素的集合称为有限集; 不含任何元素的集合称为空集, 记作  $\emptyset$ ; 既不是有限集又不是空集的集合为无限集.

设  $A, B$  是两个集合, 若  $A$  的每个元素都是  $B$  的元素, 则称  $A$  是  $B$  的子集, 记作  $A \subseteq B$ ; 若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 则称  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$ ; 若  $A \subseteq B$  且  $A \neq B$ , 则称  $A$  为  $B$  的真子集, 记作  $A \subsetneq B$ .

2. 集合的基本运算有三种: 并、交、差.

设  $A, B$  是两个集合. 由含于  $A$  或含于  $B$  的所有元素构成的集合称为  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ ; 由同时含于  $A$  与  $B$  的元素构成的集合称为  $A$  与  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ ; 由含于  $A$  但不含于  $B$  的元素构成的集称为  $A$  与  $B$  的差集, 记作  $A \setminus B$ .

若  $B \subseteq A$ , 则称  $A \setminus B$  为  $B$  关于  $A$  的余集(或补集), 记作  $\complement_A B$ . 当  $A, B, \dots$  都是  $X$  的子集时, 称  $X \setminus A$  为  $A$  的余集(或补集), 记作  $\complement A$  或  $A^c$  (本书记作  $A^c$ ).

3. 集合的运算满足以下基本法则:

(1) 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ ;

(2) 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

(3) 分配律  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,  
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ,  
 $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ ;

(4) 幂等律  $A \cup A = A, A \cap A = A$ ;

(5) 吸收律  $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  
 $A \cup B = B, A \cap B = A$  (其中  $A \subseteq B$ ),  
 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ .

4. 对偶原理 设  $X$  为基本集,  $A, B$  是  $X$  的子集, 则

(1)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ; (2)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

5. 设  $A, B$  是两个非空集合, 对  $x \in A, y \in B, (x, y)$  称为一个序偶. 由集合  $A, B$  中所有元素作成的序偶构成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的积集, 记作  $A \times B$ .

## 二、实数的完备性

1. 对有理数进行有理运算后仍然是有理数, 这个特性称为有理数关于有理运算的封闭性; 任何两个有理数之间必存在一个有理数, 这个特性称为有理数的稠密性.

有理数与无理数统称为实数, 实数布满整个坐标轴, 这个特性称为实数的连续性或完备性.

2. 设  $A$  为非空实数集, 若  $\exists L \in \mathbf{R}$ , 使得  $\forall x \in A$ , 都有  $x \leq L$ , 则称  $A$  有上界,  $L$  为  $A$  的一个上界; 若  $l \in \mathbf{R}$ , 使得  $\forall x \in A$ , 都有  $x \geq l$ , 则称  $A$  有下界,  $l$  为  $A$  的一个下界. 若  $A$  既有上界又有下界, 则称  $A$  有界, 否则, 称  $A$  无界.

3. 设  $A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$ . 若  $\exists s \in \mathbf{R}$ , 满足: (1)  $\forall x \in A$ , 都有  $x \leq s$ , (2)  $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in A$ , 使  $x_0 > s - \epsilon$ , 则称  $s$  是  $A$  的上确界, 记作  $\sup A$ .

类似可定义  $A$  的下确界, 记作  $\inf A$ .

4. 确界存在定理(实数的完备性定理) 任一有上(下)界的非空集合  $A$  必有上(下)确界.

## 疑难解析

1. 记号  $\in$  与  $\subseteq$  有什么不同?

答 记号  $\in$  表示集合与元素之间的从属关系,  $a \in A$  反映  $a$  是集合  $A$  的一个元素. 记号  $\subseteq$  反映两个集合之间的包含关系.  $A \subseteq B$  反映集合  $A$  被集合  $B$  包含.  $\subseteq$  也可记作  $\subset$ .

$a \in A$  不可以记作  $a \subseteq A$ , 但可以记作  $\{a\} \subseteq A$ , 此时  $\{a\}$  表示只含元素  $a$  的“单元素集”.

2. 怎样区分数集的最大数、最小数与数集的上确界、下确界的区别?

答 一个有上确界的数集不一定有最大数, 一个有下确界的数集不一定有最小数. 因为数集  $A$  的最大(小)数一定属于  $A$ , 而数集  $A$  的上(下)确界可以不属于  $A$ . 如  $(a, b)$  没有最大数与最小数, 但有下确界  $a$ , 上确界  $b$ .

3. 确界存在定理为什么又称为实数的完备性定理? 它有什么实际意义?

答 确界存在定理指出: 任一有上(下)界的非空实数集必有上(下)确界.

确界定理仅在实数集成立. 这是因为, 在不是实数集的情形, 定理不一定成立. 例如

$$S = \{x \mid x^2 < 2, x \in \mathbf{Q}\}, \quad \sup S = \sqrt{2}, \quad \inf S = -\sqrt{2}.$$

事实上,  $\forall x \in S$ , 由  $x^2 < 2$  得  $x < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}$  是  $S$  的一个上界. 又设  $\alpha < \sqrt{2}$ , 由有理数的稠密性知, 在  $(\alpha, \sqrt{2})$  内必有有理数  $\alpha'$ , 使得  $(\alpha')^2 < 2 \Rightarrow \alpha' \in S$ , 但  $\alpha < \alpha' \Rightarrow \alpha$  不是  $S$  的上界, 故依上确界的定义, 有  $\sup S = \sqrt{2}$ . 类似地, 有  $\inf S = -\sqrt{2}$ . 但是, 二者都不在  $\mathbf{Q}$  内.

因此, 实数集的确界存在定理是区别实数集与有理数集的本质属性, 是实数完备性的表现. 即只有实数集才是完备的.

确界存在定理  $\Rightarrow$  单调有界准则  $\Rightarrow$  闭区间套定理  $\Rightarrow$  收敛子列

原理  $\Rightarrow$  Cauchy 收敛原理, 进一步可以证明, 它们是彼此等价的. 从而知确界存在定理在实数集的理论中有非常重大的意义.

### 典型例题与习题详解

(题前标有符号“•”的为《工科数学分析基础》教材中的习题, 下同)

要求熟悉集合的基本运算, 会进行简单的证明.

• 例 1 设  $A, B$  分别为下列两个给定的集合:

(1)  $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}, B = \{2, 4, 6, 8\};$

(2)  $A$  为平面上平行四边形的全体,  $B$  为矩形的全体;

(3)  $A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, B = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}\right\}.$

试求  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ .

解 要注意,  $A \setminus B$  不一定要求  $A \supseteq B$ .

(1)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A \cap B = \{8\},$

$A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}, B \setminus A = \{2, 4, 6\}.$

(2)  $A \cup B = \{\text{平行四边形的全体}\}, A \cap B = \{\text{矩形的全体}\},$   
 $A \setminus B = \{\text{非矩形的平行四边形全体}\}, B \setminus A = \{\emptyset\}.$

(3)  $A \cup B = A, A \cap B = B, A \setminus B = \{0\}, B \setminus A = \{\emptyset\}.$

• 例 2 已知  $A$  与  $B$  分别为下列两个给定的集合:

(1)  $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x \mid 5 \leq x \leq 6\} \cup \{3\},$

$B = \{y \mid 2 \leq y \leq 3\};$

(2)  $A = \{x \mid -\infty < x < +\infty\},$

$B = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\} \cap \{y \mid \sin y = 1/2\}.$

在平面直角坐标系中画出  $A \times B$ .

解 由  $A$  与  $B$  得  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$

(1)  $A \times B$  为:  $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3; x = 3, 2 \leq y \leq 3; 5 \leq x \leq 6, 2 \leq y \leq 3$ . 它是三个区域之和, 如图 1.1.1(a) 所示.

(2)  $A \times B$  为:  $-1 \leq x \leq 1, y = \arcsin(1/2) = \pi/6$ . 它是坐标平面上一线段, 如图 1.1.1(b) 所示.

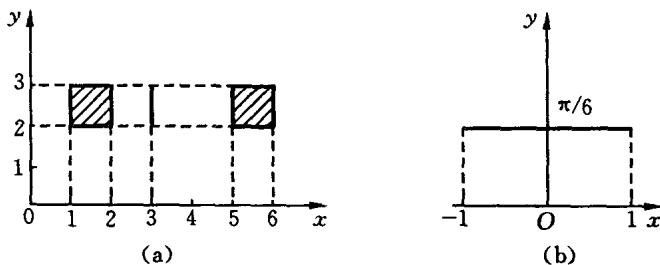


图 1.1.1

• 例 3 证明:

- (1)  $A \cup (A \cap B) = A$ ; (2)  $A \setminus B = A \cap B^c$ ;  
 (3)  $A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$ ; (4)  $B \subseteq A^c \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .

证 证明等式成立,一般是先证左边  $\supseteq$  右边,再证右边  $\supseteq$  左边,从而得到左边 = 右边.

(1)  $\forall x \in A \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B)$ , 所以  $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ .

$\forall x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A$  或  $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ , 所以  $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ . 从而  $A \cup (A \cap B) = A$ .

(2)  $\forall x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in A$  且  $x \in B^c$ , 所以  $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$ .

$\forall x \in A \cap B^c \Rightarrow x \in A$  且  $x \in B^c \Rightarrow x \in A$  且  $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$ , 所以  $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$ . 从而  $A \setminus B = A \cap B^c$ .

(3) 必要性 当  $A = B$  时,  $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ .

充分性 用反证法证. 设  $A \setminus B \neq \emptyset$ , 则  $\forall x \in A \setminus B$ , 有  $x \in A \cup B$  且  $x \in A \cap B^c$ , 从而  $x \notin A \cap B$ , 与  $A \cup B = A \cap B$  矛盾, 故必有  $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ .

(4) 必要性 因为  $A^c \cap A = \emptyset$ , 而  $B \subseteq A^c$ , 所以  $B \cap A = \emptyset$ .

充分性 用反证法证. 设有  $x_0 \in B$ , 且  $x_0 \notin A^c$ , 则  $x_0 \in B$  且  $x_0 \in A$ , 显然与  $A \cap B = \emptyset$  矛盾. 故必有  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subseteq A^c$ .

• 例 4 判断下列结论是否成立:

- (1)  $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ ;  
 (2)  $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ ;  
 (3)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ;  
 (4)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

**解** 证明结论不成立,只需举出反例.要证明结论成立,则要证明相互包含或用反证法证明.

(1) 否.如  $A = \{1,2\}, B = \{2,3,4\}, C = \{3,4\}$ .

(2) 否.如  $A = \{1,3,5\}, B = \{3,5\}, C = \{3,5,7\}$ .

(3) 是.  $\forall (x,y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow x \in A, y \in B$  或  $y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  或  $A \times C$ ,即

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C).$$

$\forall (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  或  $A \times C \Rightarrow x \in A, y \in B$  或  $y \in C$ ,即

$$(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C).$$

所以  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .

(4)  $\forall (x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow x \in A, y \in B \cap C \Rightarrow x \in A, y \in B$  且  $y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  且  $(x,y) \in A \times C$ ,即

$$A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C).$$

$\forall (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  且  $(x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A, y \in B$  且  $y \in C \Rightarrow x \in A, y \in B \cap C$ ,即

$$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C).$$

所以  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

**例 5** 设有集合  $A, B, C, D$ ,证明:

(1)  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ ;

(2)  $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup C$ ;

(3)  $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) \subseteq (A \setminus C) \cup (D \setminus B)$ ;

(4)  $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C) \iff C \subset A$ .

**证** 可以直接证,也可以利用余集来证.

(1)  $x \in (A \setminus B) \cap (C \setminus D)$



$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \text{ 且 } x \in C \setminus D$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ 但 } x \notin B \text{ 且 } x \in C \text{ 但 } x \notin D$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ 但 } x \notin B \cup D$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

或  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D)$

$$= (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c) = (A \cap C) \cap (B^c \cap D^c)$$

$$= (A \cap C) \cap (B \cup D)^c = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

$$(2) x \in A \setminus (B \setminus C) \Rightarrow x \in A, x \notin B \setminus C$$

$$\Rightarrow x \in A, x \notin B \text{ 或 } x \in A, x \notin B \text{ 但 } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \setminus B \text{ 或 } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup C.$$

或  $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$

$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap B^c) \cup C$$

$$= (A \setminus B) \cup C.$$

$$(3) (A \setminus B) \setminus (C \setminus D)$$

$$= (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c)^c = (A \cap B^c) \cap (C^c \cup D)$$

$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap D)$$

$$\subseteq (A \cap C^c) \cup (B^c \cap D)$$

$$= (A \setminus C) \cup (D \setminus B).$$

(4) 充分性 因为  $(A \setminus B) \cup C = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ , 而  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ , 所以  $A \cap C = C$ . 即  $C \subseteq A$  是等式成立的充分条件.

必要性 若  $C \not\subseteq A$ , 则有  $x \in C$  且  $x \notin A$ , 从而  $x \notin A \setminus B$  且  $x \notin A \cap C$ . 于是  $x \notin (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ , 而  $x \in (A \setminus B) \cup C$ , 从而等式不成立, 引出矛盾.

**例 6** 设  $A, B, C$  是任意集合, 证明:

$$(1) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A);$$

$$(2) (A \cap B) \cup C \equiv (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

证 式(1)是式(2)的推广.