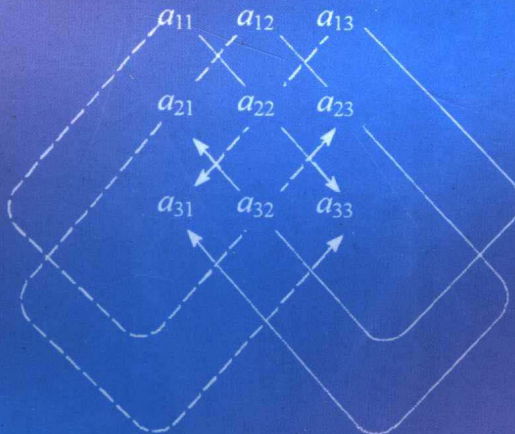


全国高等农业院校教材
全国高等农业院校教学指导委员会审定

线性代数及其应用

梁保松 苏本堂 主编



中国农业出版社

全国高等农业院校教材
全国高等农业院校教学指导委员会审定

线性代数及其应用

梁保松 苏本堂 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数及其应用/梁保松, 苏本堂主编. —北京:
中国农业出版社, 2004. 8
全国高等农业院校教材
ISBN 7-109-08949-5

I. 线... II. ①梁...②苏... III. 线性代数-高等
学校-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 071890 号

中国农业出版社出版
(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)
(邮政编码 100026)

出版人: 傅玉祥
责任编辑 龙永志

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 787mm×960mm 1/16 印张: 17.75

字数: 307 千字

定价: 23.80 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本教材是全国高等农业院校“十五规划”教材。主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性规划问题的数学模型、单纯形方法、对偶单纯形方法、线性规划应用模型等。本书取材广泛、内容丰富，突出了数学能力的培养，体现了数学建模思想，有一定的广度和深度。

本书每章后配有适量习题及综合练习题以巩固所学内容。书后附有习题答案。

全书结构严谨，叙述详细，通俗易学，可作为高等院校农、林、牧、生物、经济及工科类专业的教科书，也可以作为研究生入学考试的参考书。

主 编	梁保松	苏本堂		
副主编	赵翠萍	苏金梅	曹殿立	张雅文
	德 娜	王万雄	叶耀军	
编 者	梁保松	苏本堂	赵翠萍	苏金梅
	曹殿立	张雅文	德 娜	王万雄
	叶耀军	袁 星		
审 稿	刘 浩			

前 言

本教材是全国高等农业院校“十五规划”课程教材。

线性代数是高等农业院校本专科生的一门重要的基础课，也是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具。在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性更显突出，因此各专业对线性代数内容从深度和广度上都提出了更高的要求。

本教材按照“十五规划”高等农林教育数学教材编写大纲的要求，结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成。注意渗透现代数学思想，注重体现素质教育和创新能力的培养，以适应现代化农林科学对农林人才数学素质的要求。

本教材以行列式和矩阵为工具，以线性方程组为主线，阐明了线性代数的基本概念、理论和方法；以线性代数理论为基础，给出了线性规划理论并介绍了线性规划的应用模型。

本书在具体内容的安排上具有以下特点：

一、保持体系完整。全书结构严谨，内容由浅入深，循序渐进，通俗易懂，努力突出线性代数的基本思想和方法。一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握线性代数的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力。

二、追求简明实用。考虑到线性代数概念多、结论多、内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或简单实例引入概念，处理上力求深入浅出、通俗简单、难点分散；删去了一些烦琐的理论证明，直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出线性代数的基本概念和公式，使表达更加简明；引导学生理解概念的涵义和背景，培养学生用线性代数的思想和方法分析与解决实际问题的能力。

三、突出了数学建模思想。教材紧密联系实际，运用线性代数的理论系统地研究了线性规划模型的建立和求解，为学生运用线性代数理论实际问题提供了清晰的路径。尤其是种植业和畜牧业线性规划模型的建立，突出了线性代数在农林科学中的应用，加强了线性代数与农林专业课程的结合，为学生学习农林科学提供了“接口”。

为了巩固基础知识,加强综合能力的培养,进一步提高学习的质量,还设置了综合练习题.其题型包括判断题、填空题、计算题、证明题等.书后附有习题答案.

本书标“*”的部分是大纲内容的拓广与加深,但也是部分专业研究生考试的内容,供教师在教学中适当取舍.

河南农业大学、山东农业大学、天津农学院、内蒙古农业大学、山西农业大学、甘肃农业大学和新疆农业大学等七所高校参加了本书的编写工作.编写人员有梁保松、苏本堂、赵翠萍、苏金梅、曹殿立、张雅文、德娜、王万雄、叶耀军、袁星十位同志,最后由梁保松教授统一定稿.

河南大学刘浩教授仔细审阅了全书,并提出了宝贵建议,在此表示衷心感谢.

最后,对中国农业出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持表示衷心的感谢.

错误、不足及错漏之处,敬请专家、同行和读者批评指正.

编 者

2004年5月18日

目 录

前 言

第一章 行列式	1
第一节 二、三阶行列式	1
第二节 n 阶行列式	4
一、排列的逆序与奇偶性	4
二、 n 阶行列式的定义	6
第三节 行列式的性质	8
第四节 行列式按行(列)展开	12
第五节 克莱姆(Cramer)法则	18
习题一	20
综合练习题一	22
第二章 矩阵	25
第一节 矩阵的概念	25
第二节 矩阵的线性运算、乘法和转置运算	28
一、矩阵的加法	28
二、数与矩阵的乘法	29
三、矩阵的乘法	30
四、转置矩阵及对称方阵	34
五、方阵的行列式	36
第三节 逆矩阵	37
一、逆矩阵的定义	37
二、方阵可逆的充分必要条件	38
三、可逆矩阵的性质	41
四、用逆矩阵求解线性方程组	43
第四节 分块矩阵	44
一、分块矩阵的概念	44

二、分块矩阵的运算	45
三、分块对角矩阵和分块三角矩阵	49
第五节 矩阵的初等变换和初等矩阵	53
一、矩阵的初等变换	53
二、初等矩阵	53
三、求逆矩阵的初等变换方法	56
第六节 矩阵的秩	59
一、矩阵秩的概念	59
二、初等变换求矩阵的秩	61
*三、矩阵秩的一些重要结论	66
四、等价矩阵	68
习题二	69
综合练习题二	73
第三章 线性方程组	77
第一节 高斯 (Gauss) 消元法	77
一、基本概念	77
二、高斯消元法	78
第二节 n 维向量组的线性相关性	88
一、 n 维向量的概念	88
二、向量间的线性关系	89
三、向量组的线性相关性	91
第三节 向量组的秩和极大线性无关组	96
一、向量组的等价	96
二、向量组的极大线性无关组	97
三、向量组的秩	99
*第四节 向量空间	101
一、向量空间的定义	101
二、向量空间的基和维数	103
三、向量空间的坐标	104
四、基变换与坐标变换	105
第五节 线性方程组解的结构	108
一、齐次线性方程组解的结构	108
二、非齐次线性方程组解的结构	114

习题三	117
综合练习题三	122
第四章 相似矩阵	127
第一节 方阵的特征值与特征向量	127
一、特征值与特征向量的概念	127
二、特征值与特征向量的性质	129
第二节 方阵的相似对角化	135
一、相似矩阵的概念	135
二、方阵相似于对角矩阵的条件	137
习题四	140
综合练习题四	142
第五章 二次型	146
第一节 向量的内积	146
一、向量内积的概念	146
二、向量组的标准正交化	149
三、正交矩阵	151
第二节 二次型	153
一、二次型及其标准形	153
二、矩阵的合同	155
三、用拉格朗日 (Lagrange) 配方法化二次型为标准形	156
四、用合同变换法化二次型为标准形	158
第三节 用正交变换化二次型为标准形	161
一、正交变换	161
二、用正交变换化二次型为标准形	162
第四节 二次型的正定性	169
习题五	174
综合练习题五	177
第六章 线性规划问题	181
第一节 线性规划问题的数学模型	181
第二节 线性规划问题的图解法	184
第三节 线性规划问题的标准形式	188

第四节 线性规划问题解的性质	191
一、基本概念	191
二、凸集与极点	195
三、线性规划问题解的性质	196
习题六	197
第七章 单纯形方法	200
第一节 单纯形方法的基本思想	200
一、单纯形方法的引入	200
二、单纯形表	204
第二节 单纯形方法的基本原理	206
一、线性规划问题解的矩阵描述	206
二、最优解判定定理	207
三、单纯形表的导出及结构	207
四、无最优解的判定定理	208
第三节 单纯形方法的计算步骤	209
第四节 单纯形方法的进一步讨论	213
习题七	222
第八章 对偶线性规划问题	223
第一节 对偶问题的提出	223
第二节 线性规划问题的对偶理论	224
一、原问题与对偶问题的关系	224
二、对偶问题的非标准形式	227
三、对偶问题的基本性质	230
第三节 对偶问题的经济意义——影子价格	232
第四节 对偶单纯形方法	233
习题八	236
第九章 应用模型举例	238
第一节 线性规划模型的基本要求	238
一、线性规划模型的基本要求	238
二、建立线性规划模型的原则和应注意的问题	241
第二节 种植业模型	242

一、建立种植业模型的一般方法	242
二、应用模型举例	244
第三节 畜牧业模型	247
一、畜禽结构模型	247
二、饲料配方模型	253
参考答案	257
参考文献	270

第一章 行列式

行列式是数学研究中的一个重要工具. 本章主要介绍 n 阶行列式的性质、计算以及用行列式求解线性方程组的克莱姆 (Cramer) 法则.

第一节 二、三阶行列式

考虑用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_1, x_2 是未知量. 为消去 x_2 , 用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘以两个方程的两端, 然后两个方程相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

同理, 消去 x_1 , 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组 (1) 的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (2)$$

为便于叙述和记忆, 将方程组 (1) 中的未知量的系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 按它们在方程组中的位置排成两行两列, 引入符号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (3)$$

称 D 为二阶行列式.

构成二阶行列式的四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为该行列式的元素. 它们排成两行两列, 横的各排叫做行, 纵的各排叫做列. 数 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列元素.

二阶行列式的定义 (3) 可用对角线法则来记忆. 从行列式的左上角元素

a_{11} 到右下角元素 a_{22} 作连线, 该连线称为行列式的**主对角线**; 而行列式的左下角元素 a_{21} 到右上角元素 a_{12} 的连线称为行列式的**副对角线**. 于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

(3) 表示的是方程组 (1) 的解 (式 (2)) 中的分母. 按照二阶行列式的定义, 式 (2) 中 x_1, x_2 的表达式中的分子则分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

显然, $D_i (i=1, 2)$ 即为 D 中的第 i 列换成方程组 (1) 的常数项所得到的行列式.

于是, 当 $D \neq 0$ 时, 二元线性方程组 (1) 的解可惟一地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (4)$$

此为求解二元线性方程组的**克莱姆 (Cramer) 法则**.

例 1 用二阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, 且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

由式 (4) 得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -3.$$

若求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (5)$$

类似二元线性方程组的行列式解法, 将方程组 (5) 中未知量的系数按它们在方程组中的位置排成三行三列, 引入**三阶行列式**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

并称 D 为线性方程组 (5) 的**系数行列式**, 再将 D 中的第一列、第二列、第三

列分别换成方程组 (5) 的常数项, 分别引入三阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中, D, D_1, D_2, D_3 分别定义为

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \quad (7)$$

$$D_1 = b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32},$$

$$D_2 = b_2a_{11}a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + b_3a_{13}a_{21} - b_2a_{13}a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - b_3a_{11}a_{23},$$

$$D_3 = b_3a_{11}a_{22} + b_2a_{12}a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - b_3a_{12}a_{21} - b_2a_{11}a_{32}.$$

则当 $D \neq 0$ 时, 线性方程组 (5) 有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

此为求解三元线性方程组的克莱姆 (Cramer) 法则.

三阶行列式的值仍可由对角线法则来记忆. 以 D 为例, 由式 (7) 可见, D 由 6 项构成, 每一项均为行列式 D 的不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号, 其规律如图 1-1 所示. 图中的三条实线平行于主对角线, 实线上三个元素之积冠以正号; 三条虚线平行于副对角线, 虚线上三元素之积冠以负号.

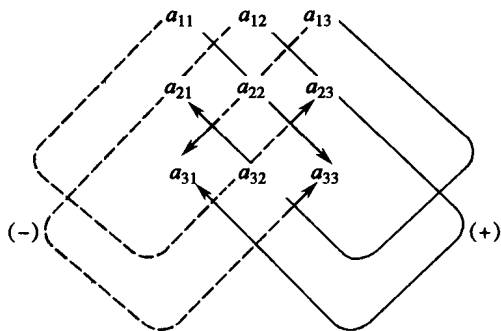


图 1-1

例 2 计算

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 $D = 2 \times 2 \times (-1) + 3 \times 3 \times 1 + (-1) \times 1 \times (-1) - (-1) \times 2 \times 1 - 3 \times (-1) \times (-1) - 2 \times 1 \times 3$
 $= (-4) + 9 + 1 - (-2) - 3 - 6 = -1.$

第二节 n 阶行列式

上一节我们利用二、三阶行列式给出了求解二元、三元线性方程组的克莱姆法则. 克莱姆法则同样适用于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组, 此时, 需要计算 n 阶行列式. 而用于计算二、三阶行列式的对角线法, 对于高于三阶的行列式就不再适用了. 为此, 我们给出 n 阶行列式的一般算法.

由式 (7) 可见:

(1) 三阶行列式展开式的每一项都是其位于不同行不同列的三个元素之积;

(2) 展开式共有六项, 每一项的三个元素的行下标按自然顺序排列时, 其列下标都是 1, 2, 3 的某个排列. 1, 2, 3 的全排列共有六种, 每一排列分别对应着展开式的一个项;

(3) 展开式六个项的符号各有三正三负. 带正号的三项列下标的排列分别为 (123), (312), (231), 它们都是自然排列 123 中的任意两个数经零次或二次 (偶数次) 对换得到的; 而带负号的三项的列下标是自然排列 123 中的任意两个数经一次 (奇数次) 对换得到的. 也就是说, 行列式展开式的每一项的符号与排列的对换次数 (奇数次或偶数次) 有关.

为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律, 下面引入逆序数的概念.

一、排列的逆序与奇偶性

n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 按一定的次序排成的一个无重复数字的有序数组称为一个 n 级排列, 记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$. 显然, n 级排列共有 $n!$ 个. 其中, 排列 $12 \cdots n$ 称为自然排列.

定义 1 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 若一个较大的数排在一个较小数的前面, 则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数, 称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

(1) 35214; (2) $n(n-1) \cdots 21$.

解 由逆序数的定义, 任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 + i_2 后面比 i_2 小的数的个数

+...+ i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

(1) $\tau(35214)=2+3+1+0=6$, 35214 为偶排列;

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

而 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需由 n 而定, 讨论如下:

当 $n=4k$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n=4k+1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n=4k+2$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n=4k+3$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

所以, 当 $n=4k$, $n=4k+1$ 时, 此排列为偶排列; 当 $n=4k+2$, $n=4k+3$ 时, 此排列为奇排列.

定义 2 一个排列中的某两个数 i, j 互换位置, 其余的数不动, 而得到一个新的排列. 对于排列所施行的这样的一个变换称为一次对换, 用 (i, j) 表示. 相邻两个数的对换称为邻换.

定理 1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 首先证明一次邻换改变排列的奇偶性.

设 n 级排列为 $\cdots ij\cdots$, 将相邻的两个数 i, j 对换, 得到一个新的排列 $\cdots ji\cdots$. 由于除 i, j 之外其余的数不动, 所以, 其余数之间的逆序没有变化.

若 $i>j$, 则新排列的逆序数比原排列减少1; 若 $i<j$, 则新排列的逆序数比原排列增加1. 所以一次邻换改变了排列的奇偶性.

再证明一般对换的情形.

设 n 级排列为 $\cdots ia_1a_2\cdots a_kj\cdots$, i, j 之间相隔 k 个数. 要实现 i, j 的对换, 得到新的排列 $\cdots ja_1a_2\cdots a_ki\cdots$, 可先将 i 与 a_1 对换, 再把 i 与 a_2 对换, $\cdots$. 这样, 经过 $k+1$ 次邻换, 就可以将 i 调换到 j 之后, 得到排列 $\cdots a_1a_2\cdots a_kji\cdots$; 然后再把 j 对换到 a_1 之前, 这需要经过 k 次邻换. 这样, 共经过 $2k+1$ 次邻换, 完成了 i 与 j 的对换. 所以原排列与新排列的奇偶性相反.

推论 1 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

由定理1, 一次对换改变排列的奇偶性. 因为 $12\cdots n$ 是偶排列, 所以若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列, 则必须经奇(偶)数次对换才能变成自然排列.