高等学校数学学习辅导教材

高等数学

习题全解

（上册）

同济·高等数学（三、四版）

陈小柱　陈敬佳　编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学习题全解

（上册）

同济高等数学（三版、四版）

陈小柱　陈敬佳　编著
姜乃斌　主审

大连理工大学出版社

策划　刘杰

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解(上册)/陈小柱,陈敬佳编著.—大连:大连理工大学出版社,1998.12

ISBN 7-5611-1520-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.①陈…②陈…　Ⅲ.高等数学-解题
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 20937 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河　邮政编码　116024
电话 0411-4708842　传真.0411 4708898
E-mail pdut@mail dlptt ln cn
大连业发印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米　1/32　字数:300 千字　印张:10 375
印数:30001—40000 册
1998 年 12 月第 1 版　　1999 年 10 月第 3 次印刷

责任编辑 刘　杰　　责任校对·清　伶
封面设计:孙宝福

定价:12.00 元(上、下册共 24.00 元)

卷首赠言

著名教育家钱令希院士指出："学习如同在硬木头上钻螺丝钉，开头先要搞正方向，锤它几下，然后拧起来就顺利了。否则钉子站得不稳不正，拧起来必然歪歪扭扭，连劲也使不上。求学之道慎起步啊！"

——摘自《中国科学院院士自述》

著名数学家北大教授姜伯驹院士指出："高等数学最重要的概念是什么，有相当一部分同志对这个问题看法是：高等数学这个课程中最重要、最基本的概念是极限，我不是太赞成这个看法"，"你要说高等数学，那首先是微分、积分这些概念弄清楚，并且会用，我觉得高等数学的重点首先应该是这个"

——摘自《数学的实践与认识》1997.4

前 言

高等数学课的重要性是众所周知的。在高等数学的教学过程中，正面临着一个无法回避却日益突出的矛盾：一方面，高等数学课的学时普遍减少，另一方面，期末考试、后续专业课程及考研对学生学习这门课又有较高的要求。

正是为了解决这一问题，我们编写了这本具有工具书性质的《高等数学习题全解》。

对于想更进一步学好高等数学这门课程的学生是大有益处的。

由于同济四版教材只对三版教材每章末增加了总习题，其它习题基本上沿用了第三版，故本书既适合三版的读者，也适合四版的读者。每道题我们都选用了较好的解题思路，但限于篇幅，一题多解的工作只好留给读者。

为了给尽可能多的读者提供便利，本书分上、下册。上册内容为：同济大学主编《高等数学》(上册)第三版习题全解、第四版上册总习题全解。

本书由姜乃斌教授担任主审，参加审稿的有刘晓东教授及王志平副教授。

限于编者水平，加之时间仓促，不妥之处一定存在，希望广大读者提出批评和指正。

编 者

1998 年 10 月

目　录

第二部分

总习题全解(同济四版)

第一章　函数与极限

万丈高楼平地起，打好基础最要紧。

——陈景润

习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 6$；　　(2) $x\geqslant 0$

(3) $x^2<9$；　　(4) $|x-3|\leqslant 4$

解　(1) $(2,6]$；　　(2) $[0,+\infty)$

(3) $(-3,3)$；　　(4) $[-1,7]$

2. 求函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

的定义域和值域。

解　定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$[-1,1]$

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

解　(1)不同。因为定义域不同。

(2)不同。因为对应法则不同，$x<0$ 时，$g(x)=-x$

(3)相同。因为定义域、对应法则均相同。

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x}$;　　(2) $y=\sqrt{3x+2}$

(3) $y=\frac{1}{1-x^2}$;　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}$

(5) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(6) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(7) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;　　(8) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$

解 (1) $1-x\neq 0, x\neq 1$　定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(2) $3x+2\geqslant 0, x\geqslant -\frac{2}{3}$　定义域为$[-\frac{2}{3},+\infty)$

(3) $1-x^2\neq 0, x\neq \pm 1$　定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(4) $x^2-4\geqslant 0, |x|\geqslant 2$　定义域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(5) $1-x^2\neq 0$　且　$x+2\geqslant 0$

即 $x\neq\pm 1$ 且 $x\geqslant -2$　定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(6) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0, x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$　定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$

(7) $4-x^2>0, |x|<2$　定义域为$(-2,2)$

(8) $x^2-3x+2\neq 0, x\neq 1$ 且 $x\neq 2$

定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

5. 用描点法作出函数 $y=\frac{1}{x^2}$的图形。

解 (略)。

6. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$,求下列函数值:

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{1}{a}), f(x_0), f(x_0+h)$

解 $f(0)=\sqrt{4+0}=2$　　$f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5}$

$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$

$f(\frac{1}{a})=\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{4a^2+1}$

$f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2}, f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$

7. 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明 $f(t)=f(\frac{1}{t})$

证明:$f(\frac{1}{t})=2(\frac{1}{t})^2+\frac{2}{(\frac{1}{t})^2}+\frac{5}{\frac{1}{t}}+5\,\frac{1}{t}$

$$=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t)$$

8. 设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$ 求 $\varphi(\frac{\pi}{6}),\varphi(\frac{\pi}{4}),\varphi(-\frac{\pi}{4}),\varphi(-2)$。并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的函形。

解　$\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2},\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0$$

$y=\varphi(x)$ 的图形为

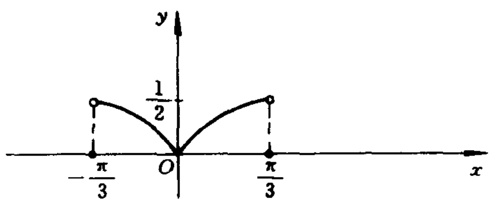

图 1-1

9. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　　(2) $y=3x^2-x^3$

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

解　(1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$

偶函数；

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$

既非奇函数又非偶函数；

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

偶函数；

(4) $f(-x)=(-x)[-(x)-1][-(x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$

奇函数；

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$

既非奇函数又非偶函数;

(6) $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}=f(x)$

偶函数。

10. 设 $f(x)=2x^2+6x-3$,求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及 $\Psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,并指出 $\varphi(x)$及 $\Psi(x)$中哪个是奇函数? 哪个是偶函数?

解 $\varphi(x)=2x^2-3$ 是偶函数;

$\Psi(x)=6x$ 是奇函数。

11. 设下面所考虑的函数都是定义域在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的积是偶函数,两个奇函数的积是偶函数,偶函数与奇函数的积是奇函数;

(3)定义在对称区间$(-l,l)$上任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证明 设 $f_1(x)$,$f_2(x)$均为偶函数,令

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

则 $$F(-x)=f_1(-x_1)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$为偶函数。

设 $g_1(x)$,$g_2(x)$均为奇函数,令

$$G(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

则 $$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$$

故 $G(x)$为奇函数。

(2)设 $f_1(x)$,$f_2(x)$均为偶函数,令

$$F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

则 $$F(-x)=f_1(-x) \cdot f_2(-x)=f_1(x) \cdot f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$为偶函数。

设 $g_1(x)$,$g_2(x)$为奇函数,令

$$G(x) = g_1(x)g_2(x)$$

因 $$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=G(x)$$

故 $G(x)$为偶函数。

设 $f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,令

$$H(x)=f(x)g(x)$$

因　$H(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x)$

故 $H(x)$为奇函数。

(3)设 $f(x)$为定义于$(-l,l)$上的任意一个函数，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]$$

$$=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$$

所以 $\varphi(x)$为偶函数。

令　$$\Psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

因为　$$\Psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]$$

$$=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]$$

$$=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\Psi(x)$$

所以 $\Psi(x)$为奇函数。

而　$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\Psi(x)$

所以 $f(x)$可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和。

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=x^2$，　$(-1,0)$；

(2) $y=\lg x$，　$(0,+\infty)$；

(3) $y=\sin x$，　$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。

解　(1)$\forall\ x_1,x_2\in(-1,0)$且 $x_1<x_2$，

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$

$\because x_1+x_1<0$，　$x_2-x_1>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$ 即 $f(x_2)<f(x_1)$

$\therefore f(x)$在$(-1,0)$单调减少

(2)设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$且 $x_1<x_2$，

$\because f(x_2)-f(x_1)=\lg x_2-\lg x_1=\lg\frac{x_2}{x_1}$

而$\frac{x_2}{x_1}>1,\lg\frac{x_2}{x_1}>0$　$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$

即 $y=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

(3)设 $x_1,x_2\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，且 $x_1<x_2$

$\because f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$

而 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0$

又 $0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$

所以，$f(x_2)-f(x_1)>0$

即 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加。

13. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

证明 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则

$$-x_1,-x_2\in(0,l)\text{，且}-x_2<-x_1$$

由 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加

则 $f(-x_2)<f(-x_1)$，因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，所以

$$f(-x_2)=-f(x_2),f(-x_1)=-f(x_1)$$

所以 $-f(x_2)<-f(x_1)$ 亦即 $f(x_1)<f(x_2)$

这就证明了对 $(-l,0)$ 内任取的 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，因此，$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

14. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$

(3) $y=1+\sin\pi x$；　　(4) $y=x\cos x$

(5) $y=\sin^2 x$

解 (1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$；

(2)是周期函数，周期 $l=\frac{\pi}{2}$；

(3)是周期函数，周期 $l=2$；

(4)不是周期函数；

(5)是周期函数，周期 $l=\pi$。

15. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$，当 a,b,c,d 满足什么条件时，这反函数与直接函数相同？

解 (1) $y=\sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x=\sqrt[3]{y+1}$ 得 $y=x^3-1$

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$ 得 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 改写为 $x=\dfrac{ay+b}{cy+d}$ 得 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

令 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{-dx+b}{cx+a}$，若使反函数与直接函数相同，则有

$$c(a+d)x^2+(d-a)(d+a)x-(d+a)b\equiv 0$$

$$a+d=0 \text{ 或 } a+d\neq 0, b=c=0, d=a\neq 0$$

16. 对于函数 $f(x)=x^2$，如何选择邻域 $U(0,\delta)$ 的半径 δ，就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$ 所对应的函数值都在邻域 $U(0,2)$ 内？

解 欲使 $f(x)\in U(0,2)$，只需 $|f(x)|<2$

由于 $|f(x)|=x^2$

即 $|x|<\sqrt{2}$

取 $\delta=\sqrt{2}$，则当 $x\in U(0,\delta)$ 时，$f(x)\in U(0,2)$

（显然取任何小于 $\sqrt{2}$ 的正数作半径 δ 亦可）。

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(2) $y=\mathrm{tg}(x+1)$

(3) $y=\arcsin(x-3)$；　　(4) $y=\sqrt{3-x}+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$

(5) $y=\ln(x+1)$；　　(6) $y=e^{\frac{1}{x}}$

解 (1) $[0,+\infty)$

(2) $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$ 　$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

(3) $2\leqslant x\leqslant 4$，即 $[2,4]$

(4) $(-\infty,0)\cup(0,3)$

(5) $(-1,+\infty)$

(6) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

2. 设 $f(x)=\arcsin x$,求下列函数值:

$f(0)$, $f(-1)$, $f(\frac{\sqrt{3}}{2})$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $f(1)$

解 $f(0)=0$, $f(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{3}$,

$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4}$, $f(1)=\frac{\pi}{2}$

3. 设 $G(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}$,求下列函数值:

$G(0)$,$G(1)$,$G(\sqrt{2})$,$G(-\sqrt{3})$,$G(-2)$

解 $G(0)=\frac{\pi}{4}$, $G(1)=\frac{\pi}{6}$, $G(\sqrt{2})=\frac{\pi}{8}$,

$G(-\sqrt{3})=\frac{5}{12}\pi$, $G(-2)=\frac{\pi}{2}$

4. 设 $F(x)=e^x$,证明:

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$;

(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$。

证明 (1)$F(x)\cdot F(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y}=F(x+y)$;

(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}=F(x-y)$。

5. 设 $G(x)=\ln x$

证明 当 $x>0,y>0$,下列等式成立:

(1)$G(x)+G(y)=G(xy)$;

(2)$G(x)-G(y)=G(\frac{x}{y})$。

证明 (1) $G(x)+G(y)=\ln x+\ln y=\ln(xy)=G(xy)$;

(2) $G(x)-G(y)=\ln x-\ln y=\ln(\frac{x}{y})=G(\frac{x}{y})$。

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形,作出下列函数的图形:

(1) $y=\frac{1}{2}+\sin x$;　　(2) $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$

(3) $y=3\sin x$;　　(4) $y=\sin 2x$

(5) $y=3\sin(2x+\frac{2}{3}\pi)$

解 (略)

7. 利用图形的"叠加",作出下列函数的图形:

(1) $y=x+\frac{1}{x}$　　　　(2) $y=x+\sin x$

(3) $y=\sin x+\cos x$

解　(略)。

8. 求下列函数的反函数:

(1) $y=2\sin 3x$;　　　　(2) $y=1+\ln(x+2)$

(3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$

解　(1)$y=2\sin 3x$ 改写成 $x=2\sin 3y$　得 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$

(2)$y=1+\ln(x+2)$改写为 $x=1+\ln(y+2)$

得 $y=\frac{e^x}{e}-2$

(3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$　改写为　$x=\frac{2^y}{2^y+1}$

得 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$

9. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2$,　$u=\sin x$,　$x_1=\frac{\pi}{6}$,　$x_2=\frac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u$,　$u=2x$,　$x_1=\frac{\pi}{8}$,　$x_2=\frac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$,　$u=1+x^2$,　$x_1=1$,　$x_2=2$;

(4) $y=e^u$,　$u=x^2$,　$x_1=0$,　$x_2=1$;

(5) $y=u^2$,　$u=e^x$,　$x_1=1$,　$x_2=-1$

解　(1) $y=\sin^2 x$,　$y_1=\frac{1}{4}$,　$y_2=\frac{3}{4}$;

(2) $y=\sin 2x$,　$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,　$y_2=1$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$,　$y_1=\sqrt{2}$,　$y_2=\sqrt{5}$;

(4) $y=e^{x^2}$,　$y_1=1$,　$y_2=e$;

(5) $y=e^{2x}$,　$y_1=e^2$,　$y_2=e^{-2}$

10. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,问(1)$f(x^2)$,(2)$f(\sin x)$,(3)$f(x+a)$,($a>0$),(4)$f(x+a)+f(x-a)$($a>0$)的定义域各是什么?