DIANCICHANGLILUN

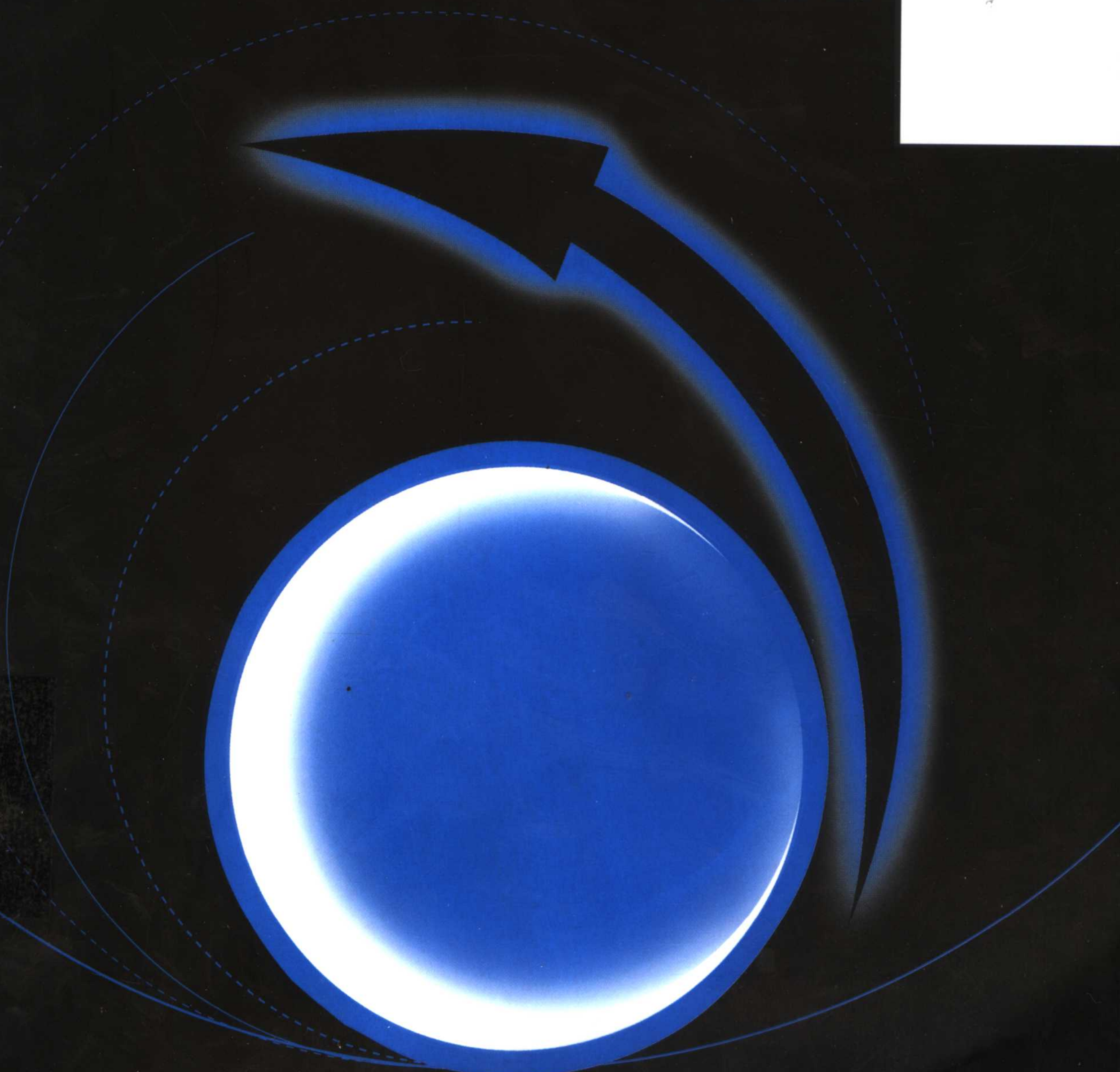
电磁场理论

与微波技术基础解题指导

YUWEIBOJISHUJICHUJIETIZHIDAO

周希朗 编著

东南大学出版社



电磁场理论与微波技术基础解题指导

周希朗　编著

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

内 容 提 要

本书是与《电磁场理论与微波技术基础》(上、下册)相配套的教学参考书。全书分上、下两篇共12章,每章内容包括:主要内容与重点、主要公式以及例题,附录中给出8套自测试题及其参考答案。本书力求内容精练,表述清晰,便于自学。

本书的例题主要选自教材中的习题,选题类型广泛,难易适中,并兼顾综合题型。例题解答既注重概念上的分析,也注意数学上的演算,部分例题提供多种解法或多解提示,帮助读者熟悉典型题的解题思路、方法和技巧。

本书可供工科信息工程、电子科学与技术等专业的大学生用作复习《电磁场与波》、《微波技术与天线》或《电磁场与微波技术》课程的教学参考书,也可供高校相关专业的大学生和有关科技人员用作参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论与微波技术基础解题指导/周希朗编著.一南京:东南大学出版社,2005.10

ISBN 7-5641-0173-3

Ⅰ.电… Ⅱ.周… Ⅲ.①电磁场—理论—高等学校—解题②微波技术—高等学校—解题 Ⅳ.①0441.4②TN015—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第110705号

电磁场理论与微波技术基础解题指导

作　者	周希朗	责任印制	张文礼
责任编辑	李　玉	封面设计	瀚清堂
文字编辑	胡中正	版式设计	李　玉

出版发行　东南大学出版社
地　址　南京四牌楼2号
邮　编　210096
经　销　江苏省新华书店
印　刷　南京玉河印刷厂
开　本　787 mm×1092 mm　1/16
印　张　19
字　数　490千字
版　次　2005年10月第1版　2005年10月第1次印刷
定　价　31.00元
印　数　1—4000册

前　　言

本书是与《电磁场理论与微波技术基础》(上、下册，东南大学出版社，2004，2005)相配套的教学参考书，其内容主要参照《"电磁场与波"和"微波技术与天线"课程教学大纲》的基本要求进行编写。本书可作为学生学习"电磁场与波"、"微波技术与天线"或"电磁场与微波技术"课程的学习指导书，也可作为教师讲授相关课程的教学参考书。

"电磁场与波"和"微波技术与天线"是信息工程、电子科学与技术等工科电子类专业的两门重要技术基础课和专业课，这两门课程的内容概念抽象，公式繁多，许多学生在学习过程中兴趣不高且有畏难情绪，不少同学反映听课尚懂，但自己做题却无从下手。根据编者多年的教学经验，学生在学习这两门"场"方面课程时遇到的疑难问题具有一定的普遍性，因此，编写一本简明的学习指导书对学生的学习非常有益。为此，编者针对在校大学生学习或社会上不少青年自学"电磁场与波"、"微波技术与天线"或"电磁场与微波技术"课程的实际需要，在长期资料搜集、积累和对相关问题不断探索的基础上，编写了这本教学参考书，将它奉献给广大读者，希望它能为大家排除学习"场"方面课程中遇到的困难，提高学习"场"方面课程的兴趣，培养分析问题、解决问题的能力，树立学习的自信心，为进一步学好后续课程或从事科研工作打下扎实基础。

本书的各章内容包括：主要内容与重点、主要公式以及例题。"主要公式"部分的编写尽可能简明扼要，便于读者复习时用较短的时间记忆公式。"例题"部分的选题尽可能做到：1. 注重基本概念和基本内容；2. 部分例题提供一题多解或多解提示；3. 重点内容题量多，并兼顾一般内容；4. 多数例题难度适中，并适当提供综合类的题型。在例题的解题过程中，编者力求注意点拨思路、启迪思维、揭示规律，使读者通过解题或阅读掌握基本概念、解题方法和规律，从而使读者不断提高自身求解"场"方面问题的能力。此外，对教材的个别疏漏之处，本书也给出了更正。编者希望初学者一定要在认真阅读教材和"主要公式"以及通过独立思考、独立解题之后，再参考或阅读相关例题的解题过程，切不可一味地依赖"例题"部分的内容。

本书的编写始终得到上海交通大学电子工程系和电磁场与微波技术教研室领导和同事李征帆教授等的关心、鼓励和支持，也得到东南大学出版社李玉老师的支持和无私的帮助，对上述在本书编写出版工作中曾给予关心、鼓励、支持和帮助的同志们，编者一并表示衷心的感谢。此外，在编写过程中，编者参阅了国内外的相关教材和参考书，编者同样向有关教

材、参考书的编著者致以崇高的敬意。

由于编者学识水平有限和时间仓促，书中会有不妥或错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2005.8

目录

上篇(电磁场理论基础部分)

上　篇

（电磁场理论基础部分）

第 1 章 矢量分析

1.1 本章主要内容与重点

本章主要内容：矢量代数运算、标量场的梯度、矢量场的散度和旋度、标量场、矢量场的重要性质和定理以及正交曲线坐标系。

本章重点：与标量场的梯度、矢量场的散度和旋度有关的概念和简单运算；标量场和矢量场的重要性质以及与正交曲线坐标系有关的概念和简单计算。

1.2 主要公式

1.2.1 矢量代数运算

(1) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量：$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{A}/A$，其中 A 是 $\boldsymbol{A}$ 的模。在直角坐标系下，若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z$，则

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_x \frac{A_x}{A} + \boldsymbol{a}_y \frac{A_y}{A} + \boldsymbol{a}_z \frac{A_z}{A} \tag{1.1}$$

而 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$。

(2) 直角坐标系中，位置矢量或矢径 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y + \boldsymbol{a}_z z$$

距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}_x(x - x') + \boldsymbol{a}_y(y - y') + \boldsymbol{a}_z(z - z')$$

其单位矢量 $\boldsymbol{a}_R$ 为

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{R} = \boldsymbol{a}_x \frac{x - x'}{R} + \boldsymbol{a}_y \frac{y - y'}{R} + \boldsymbol{a}_z \frac{z - z'}{R} \tag{1.2}$$

(3) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标量积：$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta_{AB}$，其中 θ_{AB} 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 间较小的夹角（即 $\theta < 180°$）。在直角坐标系下，$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$。

(4) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积：$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_n AB\sin\theta_{AB}$，其中 $\boldsymbol{a}_n$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 构成的平面，且 $\boldsymbol{a}_n$ 与 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 满足右手螺旋关系。在直角坐标系下

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

(5) 三个矢量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 的三重标积公式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.3a}$$

(6) 三个矢量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 的三重矢积公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.3b}$$

1.2.2 标量场的梯度

(1) 标量场 $\phi(x, y, z)$在直角坐标系下的梯度公式为

$$\text{grad}\,\phi=\nabla\phi=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.4}$$

显然,标量场的梯度是一个矢量场。$\nabla\phi$ 的模和方向是标量 ϕ 在某点处的最大方向导数及其出现最大方向导数的方向。

(2) 梯度运算规则

$$\nabla(\phi\pm\psi)=\nabla\phi\pm\nabla\psi \tag{1.5}$$

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi \tag{1.6}$$

式中,ϕ、ψ 均为标量场。

1.2.3 矢量场的通量、散度和散度定理

(1) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过场中任一曲面的通量为 $\Phi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,若曲面为闭曲面,则 $\Phi=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。

(2) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度的定义式

$$\text{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.7a}$$

(3) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在直角坐标系下的表达式

$$\text{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.7b}$$

显然,矢量场的散度是一个标量场。若 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为无散场(或无源场)。

(4) 散度运算规则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\pm\nabla\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.8}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi \tag{1.9}$$

1.2.4 矢量场的环量、旋度和斯托克斯定理

(1) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿场中任一封闭曲线的环量

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

(2) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度在直角坐标系下的表达式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

显然，矢量场的旋度是一个矢量场。其大小是 $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的最大环量面密度，方向是当面元的取向使环量面密度取得最大值时该面元矢量的方向。若 $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场（或称保守场）。

(3) 旋度运算规则

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} \pm \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1.11}$$

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = \phi(\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\nabla \phi) \times \boldsymbol{A} \tag{1.12}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{1.13}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.14}$$

(4) 斯托克斯定理

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.15}$$

(5) 旋度定理

$$\int_V (\nabla \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = -\oint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

1.2.5 标量场、矢量场的重要性质

(1) 梯度场的旋度恒为零，即

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

(2) 旋度场的散度恒为零，即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

1.2.6 正交曲线坐标系

(1) 正交曲线坐标系的度量因子

$$h_i = \left[\sum_{n=1}^{3} \left(\frac{\partial G_n}{\partial u_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.17}$$

式中，$u_i(i=1,2,3)$是正交曲线坐标系的坐标，而$G_1(u_1,u_2,u_3)=x$，$G_2(u_1,u_2,u_3)=y$，$G_3(u_1,u_2,u_3)=z$。

(2) 正交曲线坐标系中单位矢量$\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,3)$与直角坐标系单位矢量间的关系

$$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_x\frac{1}{h_i}\frac{\partial G_1}{\partial u_i}+\boldsymbol{a}_y\frac{1}{h_i}\frac{\partial G_2}{\partial u_i}+\boldsymbol{a}_z\frac{1}{h_i}\frac{\partial G_3}{\partial u_i}\quad(i=1,2,3)\tag{1.18}$$

(3) 圆柱坐标系的单位矢量与直角坐标系的单位矢量间的关系

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\\\boldsymbol{a}_\varphi\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\\\boldsymbol{a}_y\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}=[M]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\\\boldsymbol{a}_y\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}\tag{1.19a}$$

或

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\\\boldsymbol{a}_y\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}=[M]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\\\boldsymbol{a}_\varphi\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}\tag{1.19b}$$

式中，$[M]^{\mathrm{T}}$为$[M]$的转置矩阵。

(4) 圆球坐标系的单位矢量与直角坐标系的单位矢量间的关系

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_R\\\boldsymbol{a}_\theta\\\boldsymbol{a}_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi&\sin\theta\sin\varphi&\cos\theta\\\cos\theta\cos\varphi&\cos\theta\sin\varphi&-\sin\theta\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\\\boldsymbol{a}_y\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}=[M]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\\\boldsymbol{a}_y\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}\tag{1.20a}$$

或

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\\\boldsymbol{a}_y\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}=[M]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_R\\\boldsymbol{a}_\theta\\\boldsymbol{a}_\varphi\end{bmatrix}\tag{1.20b}$$

(5) 正交曲线坐标系下梯度、散度和旋度的展开式

标量场中的梯度：$$\nabla\phi=\boldsymbol{a}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}+\boldsymbol{a}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}+\boldsymbol{a}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\tag{1.21}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]\tag{1.22}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{a}_1&h_2\boldsymbol{a}_2&h_3\boldsymbol{a}_3\\\dfrac{\partial}{\partial u_1}&\dfrac{\partial}{\partial u_2}&\dfrac{\partial}{\partial u_3}\\h_1A_1&h_2A_2&h_3A_3\end{vmatrix}\tag{1.23}$$

1.3 例题

例 1.1(上册习题 1-1*) 已知$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x+2\boldsymbol{a}_y-3\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B}=-4\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{C}=5\boldsymbol{a}_x-2\boldsymbol{a}_z$，

* 上册习题 1-1，代表配套教材上册第 1 章习题 1-1，余同。

求：① $\boldsymbol{a}_A$；② $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；③ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；④ θ_{AB}；⑤ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；⑥ $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；⑦ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解：① $\boldsymbol{a}_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}=\dfrac{\boldsymbol{a}_x+2\boldsymbol{a}_y-3\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{1+2^2+(-3)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{a}_x+2\boldsymbol{a}_y-3\boldsymbol{a}_z)$

② $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|(1-0)\boldsymbol{a}_x+(2-(-4))\boldsymbol{a}_y+(-3-1)\boldsymbol{a}_z|=\sqrt{53}$

③ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=1\times0+2\times(-4)-(3\times1)=-11$

④ $\theta_{AB}=\arccos\left(\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left(\dfrac{-11}{\sqrt{17}\sqrt{14}}\right)=135.48^\circ$

⑤ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x&\boldsymbol{a}_y&\boldsymbol{a}_z\\1&2&-3\\5&0&-2\end{vmatrix}=-(4\boldsymbol{a}_x+13\boldsymbol{a}_y+10\boldsymbol{a}_z)$

⑥ $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}1&2&-3\\0&-4&1\\5&0&-2\end{vmatrix}=-42=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$

⑦ 方法Ⅰ(直接计算)：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x&\boldsymbol{a}_y&\boldsymbol{a}_z\\1&2&-3\\0&-4&1\end{vmatrix}=-10\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y-4\boldsymbol{a}_z$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x&\boldsymbol{a}_y&\boldsymbol{a}_z\\-10&-1&-4\\5&0&-2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{a}_x-40\boldsymbol{a}_y+5\boldsymbol{a}_z$$

方法Ⅱ(利用三重矢积公式)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}&=-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})]\\&=2\boldsymbol{A}+11\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{a}_x-40\boldsymbol{a}_y+5\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

同理可得

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=11\boldsymbol{B}+11\boldsymbol{C}=55\boldsymbol{a}_x-44\boldsymbol{a}_y-11\boldsymbol{a}_z。$$

例 1.2　证明三重矢积公式：$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$。

证法Ⅰ：由于 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 垂直于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$，则有 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 与 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 共面，且

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=k_1\boldsymbol{B}+k_2\boldsymbol{C}\tag{1}$$

式中 k_1，k_2 为常数，且有

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0\tag{2}$$

及

$$(k_1\boldsymbol{B}+k_2\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=k_1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+k_2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\tag{3}$$

由以上三式，得

$$k_1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+k_2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})=0\tag{4}$$

显然，若设 $k_1=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$，则 $k_2=-\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$。于是，将 k_1，k_2 代入式(1)，有

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{5}$$

因上式对任何 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 均成立，不失一般性，取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_z$，则代入式(5)，有

$$\boldsymbol{a}_y\times(\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_z)=\lambda(\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_z)\boldsymbol{a}_y-\lambda(\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_y)\boldsymbol{a}_z$$

即 $\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_x=-\lambda\boldsymbol{a}_z$，可得 $\lambda=1$，从而式(5)变为

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

证法Ⅱ：设 $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{a}_x+b_1\boldsymbol{a}_y+c_1\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B}=a_2\boldsymbol{a}_x+b_2\boldsymbol{a}_y+c_2\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{C}=a_3\boldsymbol{a}_x+b_3\boldsymbol{a}_y+c_3\boldsymbol{a}_z$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$。于是

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}&=(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)(a_2\boldsymbol{a}_x+b_2\boldsymbol{a}_y+c_2\boldsymbol{a}_z)-\\
&\quad(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)(a_3\boldsymbol{a}_x+b_3\boldsymbol{a}_y+c_3\boldsymbol{a}_z)\\
&=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ -\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_x-\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ \begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_y+\\
&\quad\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ \begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_z\\
&=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ a_1 & b_1 & c_1\\ \begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

又由于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_x-\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_y+\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_z$，则

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ a_1 & b_1 & c_1\\ \begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\end{vmatrix} \tag{7}$$

比较式(6)、(7)，即得证。

例 1.3(上册习题 1-11)　已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_xx+\boldsymbol{a}_yy+\boldsymbol{a}_zz$，$A$ 为一常量，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：①$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$；②$\nabla\times\boldsymbol{r}$；③$\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$；④$\nabla\cdot(A\boldsymbol{r})$。

解：① $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\dfrac{\partial r_x}{\partial x}+\dfrac{\partial r_y}{\partial y}+\dfrac{\partial r_z}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial z}=3$；

② $\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$；

③ $\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{1}{r}(\nabla\times\boldsymbol{r})+\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\times\boldsymbol{r}=0+\left(-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\times\boldsymbol{r}=0$；