ANBAIWUSHI NIAN LICHENG

350年历程

从费尔马到维尔斯

胡作玄＼著

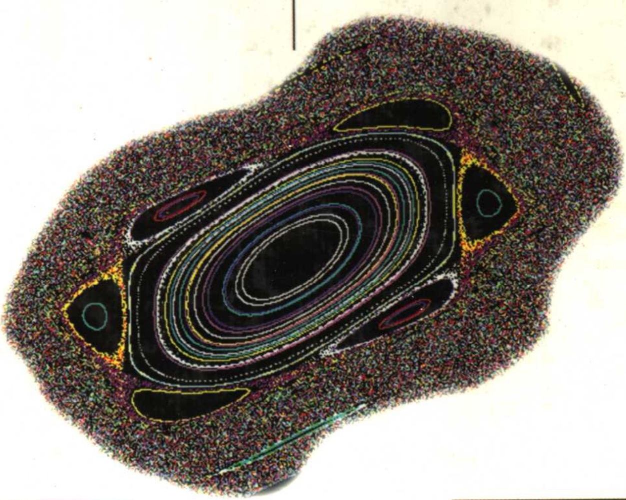
山东教育出版社

主编·曾国屏

新·视·野·丛·书

第1辑

副主编·刘兵·刘华杰·杨君游



350年历程

从费尔马到维尔斯

SANBAI WUSHI NIAN LICHENG

胡作玄＼著

山东教育出版社

新视野丛书（第1辑）

350年历程

——从费尔马到维尔斯

胡作玄　著

*

山东教育出版社出版发行

（济南经九路胜利大街）

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

850毫米×1168毫米 32开　8印张　5插页　167千字

1996年12月第1版　1996年12月第1次印刷

印数1—2000

ISBN7—5328—2335—0/G·2159

定价11.70元

编者的话

现代文明的潮流正在我们的时代奔涌，种种新学科、新理论、新思想在这个历史的潮流中翻波鼓浪，知识更新、学科交叉、知识集成在这个历史的潮流中分合汇聚。

改革开放、科教兴国，我们的国家正在走向世界，走向现代化，走向可持续发展的美好未来。在这个崭新的发展时期，我们正面临和经历着不同文化传统、学术观点、科学文化和人文文化的大交流、大碰撞和大融合。

于是，《新闻出版报》组织发表的“新学科出版物系列述评”不仅受到了出版界的赞扬和重视，而且得到了社会的广泛欢迎和好评。正是在此“系列述评”的直接鼓舞和学术前辈的热情关怀下，《新视野丛书》应运而生。

《新视野丛书》以促进文理相通、科教兴国、社会发展和文化繁荣为宗旨，将致力于发表、宣传和传播具有强烈时代感的新学科、新理论和新思想以及对于社会热点问题的新观察、新研究和新思考。

《新视野丛书》在坚持新颖性和高品位的同时，还注重严谨

学风和活泼文风的统一，以更好地为广大读者服务，以促进对于我们的时代进行更广泛的思考分析和更深刻的认识理解。

特别是：《新视野丛书》希望自己成为广大读者的朋友，在读者朋友们的支持下共同拓展好通向未来的、有利于思想交流共鸣的知识新视野。

《新视野丛书》编委会

1996 年 6 月于北京

胡作玄　著

350年历程——从费尔马到维尔斯

内容提要

一个比哥德巴赫(Goldbach)猜想更有名气的数论难题——费尔马(Fermat)大定理，悬置长达350年时间，1995年终于被英国数学家维尔斯(Wiles)彻底攻克，1996年3月维尔斯因此荣膺沃尔夫(Wolf)奖。此定理不仅是数论中的一个著名难题，更重要的在于它是一只“会下金蛋的鹅”，它给整个数学带来了巨大财富，促进了代数数论和算术代数几何学的建立，还发展了一系列先进数学技术，形成了现代数论无尽的前沿，此定理的攻克再次显示了数学大厦的统一性。

本书从数的演化和数论问题讲起，讨论了与费尔马定理有关的丢番图逼近、分圆域理论、代数几何、椭圆曲线等研究方法。作者高屋建瓴，完整准确地描述了从库默尔、法尔廷斯，一直到维尔斯等众多数学大师对费尔马命题不懈的攻坚足迹，令人信服地展示了“摆脱孤立状态”是取得重大突破的关键所在，这对于读者深入领会数学发展史和数学文化颇有教益。

作者简介

胡作玄，男，1936年生，1957年北京大学毕业，1964年到中国科学院数学研究所工作，1980年转中国科学院系统科学研究所工作，现任研究员。1985年到1987年曾在联邦德国汉堡大学数学系自然科学、数学及技术史研究所任访问教授；主要研究近现代数学史及科技史。著有《近代数学史》（江苏教育出版社，1996）、《布尔巴基学派的兴衰》（知识出版社，1984）、《第三次数学危机》（四川人民出版社，1985）、《数学与社会》（湖南教育出版社，1992）、《引起不和的金苹果——康托尔传》（福建教育出版社，1994）等以及论文数十篇。

350年历程——从费尔马到维尔斯

胡作玄　著

目　录

引　言

众所周知的费尔马大定理终于尘埃落定，经历了350多年的漫长岁月，最终被40多岁的英国数学家维尔斯（Andrew Wiles，1953— ）所攻克。费尔马（Pierre Fermat，1601—1665）也是在40岁左右提出这个伟大的猜想的。1900年8月巴黎闷热的夏天，还不满40岁的希尔伯特（David Hilbert 1862—1943）以数学大师的宏伟气魄，纵论全局，指点未来，提出他那著名的23个数学问题。奇怪的是，费尔马大定理并不在其中。

仔细看一下"数学问题"这篇经典之作，他对数学的精辟论述今天看来仍大有启迪。我们还是看看他的原话：

历史教导我们，科学的发展具有

连续性。我们知道，每个时代都有它自己的问题，这些问题后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题。如果我们想对最近的将来数学知识可能的发展有一个概念，那就必须回顾一下当今科学提出的，期望在将来能够解决的问题。现在，当此世纪更迭之际，我认为正适于对问题进行这样一番检阅。因为，一个伟大时代的结束，不仅促使我们追溯过去，而且把我们的思想引向那未知的将来。

顺便提一句，19 世纪末希尔伯特一个人干的事 100 年后已经由当今一大批精英所代替，他们组织起来共同提出未来的问题。希尔伯特接着提到问题对数学发展的重要性：

某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。正如人类的某项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界。

希尔伯特是数论专家，他知道数论问题成千上万，不可胜数。那么，什么问题是重要的和有价值的呢？

想要预先正确判断一个问题的价值是困难的，并且常

常是不可能的；因为最终的判断取决于科学从该问题得到的获益。虽说如此，我们仍然要问，是否存在一般的准则可借以鉴别出好的数学问题。一位法国老数学家曾经说过："要使一种数学理论变得这样清晰，以致你能向在大街上遇到的第一个人解释它。在此之前，这一数学理论不能被认为是完善的。"这里对数学理论所坚持的清晰性和易懂性原则，我想更应以之作为对一个堪称完善的数学问题的要求；因为，清楚的、易于理解的问题吸引着人们的兴趣，而复杂的问题却使我们望而却步。

其次，为着具有吸引力，一个数学问题应该是困难的，但却不应是完全不可解决而致使我们白费力气。在通向那隐藏的真理的曲折道路上，它应该是指引我们前进的一盏明灯，最终并以成功的喜悦作为对我们的报偿。

接着他以约翰·伯努利(Johann Bernoulli，1667—1748)提出的"最速降线"问题为例说明自己的观点。他引用伯努利自己的话说："经验告诉我们，正是摆在面前的那些困难同时也是有用的问题，引导着有才智的人们为丰富人类的知识而奋斗。"希尔伯特接着写道："这个问题好比一块试金石，通过它，分析学家们可以检验其方法的价值，衡量他们的能力。"最后变分法这门学科的产生应归功于这个问题。

总之，希尔伯特认为，好问题在于它有用和增进知识，而在历史上的重要特殊问题在于它能创造新方法、建立新理论、开辟新领域。这无疑反映他对数学问题的重要性的观点。费尔马大定理正是一个特殊的难题："众所周知，费尔马断言：丢番图

方程

$$x^n+y^n=z^n \text{（}x, y, z\text{ 为整数，}n\text{ 为自然数）}$$

除去某些平凡的情形外是不可解的。证明这种不可解性的尝试，提供了一个明显的例子，说明这样一个非常特殊、似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响。受费尔马问题的启发，库默尔（Ernst Eduard Kummer，1810－1893）引进了理想数，并发现了把一个循环数域的整数分解为理想素因子的唯一分解定理，这一定理今天已被戴德金（Richard Dedekind，1831－1916）和克洛耐克（Leopold Kronecker，1823－1891）推广到任意代数数域，在近代数论中占着中心地位，而且其意义已远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域。"

显然希尔伯特把费尔马问题放在一个超乎寻常的突出地位，它的意义绝对不是解决一个孤立的问题，它的每一进步都给数学带来丰厚的礼物，事实证明的确如此。希尔伯特当时已经看到，库默尔的分圆数理论及理想数理论为代数数论奠定了基础，这些理论远远超过对费尔马定理的推动。他总是从更广更深的观点来看问题，他可能已经意识到当时已经萌芽的一些方法如闵可夫斯基（Hermann Minkowski，1864－1909）的二次型论的局部—整体方法和丢番图逼近、丢番图几何对费尔马大定理乃至整个数学的意义。

通过 23 个著名的数学问题，希尔伯特为 20 世纪的数学特别是数论指出了方向。首先，23 个问题中有 6 个是直接同数论有关的：

第 7 问题，证明某些数是超越数。这个领域在当时刚刚萌芽。1873 年法国数学家埃尔米特（Charles Hermite，1822－

1901）打响第一炮，证明自然对数底 e 的超越性。1882 年希尔伯特的老师林德曼（Ferdinand Lindemann，1852—1939）出乎埃尔米特意料之外，使用大致相同的路线证明 π 的超越性，从而完全解决“化圆为方”问题。希尔伯特本人也研究过这个问题，但还没有一般的方法。而希尔伯特第 7 问题导致 20 世纪的发展已把这些零散结果扩大成为丢番图逼近一大分支，进而为包括费尔马大定理在内的丢番图方程的研究提供一个全新的方向。

第 8 问题，包括数论中一些至关重要的猜想，首先是数论的核心问题，黎曼（Bernhard Riemann，1826—1866）猜想以及相关的素数定理的误差项的阶。其次是哥德巴赫（Christian Goldbach，1690—1764）猜想和孪生素数猜想。希尔伯特还把这两个猜想归纳成一个更强的猜想。这两个猜想，特别是哥德巴赫猜想，实际上是 20 世纪解析数论发展的核心。

希尔伯特的眼光还在于他深刻认识到黎曼 ζ 函数的意义，并把它推广到代数数域上，当然他的重点在于把素数分布的定理推广到素理想分布之上，这是 20 世纪解析数论的最早的一个方向。

第 9 问题是一般互反律，这是 20 世纪的类域论的核心。

第 10 问题是丢番图方程，丢番图方程不仅至关重要，而且开辟了数理逻辑的一个方向。

第 11 问题是代数数域上的二次型问题，这里他指出一个方向性问题，把有理数域上的问题推广到任意域，首先是代数数域上的问题。从代数数论的系统理论到费尔马大定理有关的种种问题，这种推广现在已是一种常规。

第12问题是阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802—1829）域的克洛耐克定理的推广，这问题直接导致当前数论的中心纲领——朗兰兹（Robert P. Langlands，1936—　）纲领。

这6个问题的发展不仅完全刻画了20世纪的数论概貌，而且深刻指出了数论的发展方向。

不仅如此，在希尔伯特的“数学问题”之中，也指出了其他的方向。

1. 数论与代数函数论的类似，特别是代数簇上的数论，这直接导向算术代数几何或丢番图几何。

2. 局部域特别是p进域与全局域的关系，这导致局部类域论。

3. 自守函数、模函数以及单值化问题的重要性。

4. 费尔马数$2^{2^n}+1$是否为素数问题，这是现代计算数论的中心问题之一。

另外，希尔伯特在“数论问题”中没有提到的华林（Edward Waring，1736—1798）问题，也由他在1908年取得突破，证明有限性定理，这为其它数论问题的解决树立了典范。

总而言之，希尔伯特既是建立理论的大师，又是解决重大猜想的能手。当然，他不能对前辈大数学家研究过的费尔马大定理置之不顾。

1908年，德国达姆施塔特技术大学教授沃尔斯凯尔（Paul Wohlskehl，1856—1906）遗赠10万马克为解决费尔马大定理设奖，在这笔奖金颁发之前，其利息交由格廷根科学院一个委员会处置，而希尔伯特则是该委员会的主席。大量错误的证明像雪片飞来，当然没有一个正确。于是希尔伯特把10万马克的