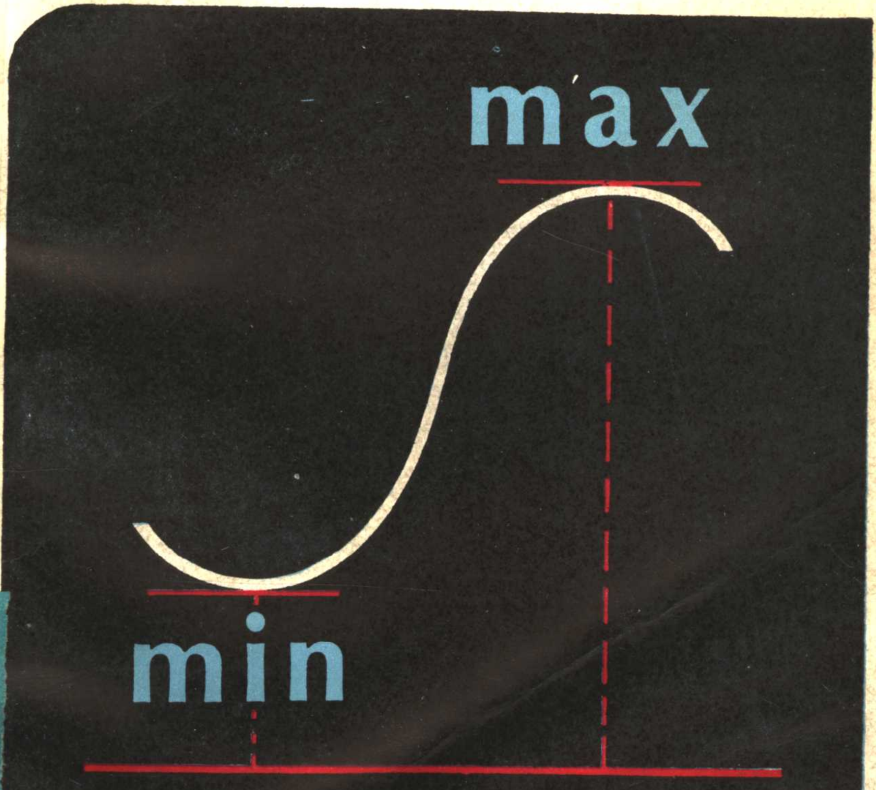
# 物理学中的极值




安徽科学技术出版社

# 物理学中的极值

王　明　智

安徽科学技术出版社

责任编辑：杨家骝
面封设计：刘传文

**物理学中的极值**
王明智　编
*
安徽科学技术出版社出版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：5.5　字数：112,000
1984年4月第1版　1984年4月第1次印刷
印数：1—10,550
统一书号：13200·50　定价：0.79元

## 内 容 提 要

本书详细地介绍了求物理极值的典型方法，以及极值解法在物理学中的一些应用，各节都配有例题、习题；书末附有答案和必要的提示，可供读者练习时参考。

本书可供高中学生及大学低年级学生课外阅读，也可供大、中学物理教师教学时参考。

# 前　　言

高中和大学低年级的学生，在学习物理的过程中，经常会遇到求某一物理量的极值问题。多数学生对求解这类问题感到困惑。这是因为在解题过程中，一方面要根据具体情况分析物理过程，建立函数关系，分析所求量的极值条件；另一方面又要运用一定的数学手段。为了引导学生有效地应用物理定律解答极值问题，本书系统地介绍了利用初等数学、高等数学及根据物理条件求解极值的方法，解决物理学中各类极值问题。

本书各节都配有例题、习题，书后附有答案和必要的提示，可供读者练习时参考。

在编写这本书时，主要参考了下列有关资料文献：

(1)目前国内发行的一些理、工科大学用的《普通物理学》及《普通物理习题集》。

(2)中学物理教学大纲及课本。

(3)国内外有关数理杂志。

(4)Г.А宾德里科夫、Б.Б布霍夫采夫、В.В克尔任采夫、Г.Я米亚基舍夫合著《物理习题集》（莫斯科大学出版社，1977年版）。

在编写过程中，顾梅玲、梁作源等同志审阅了部分手稿并提出许多有益的意见，蒋朴同志绘制了全部插图，在此，谨致以衷心地感谢。

限于编者水平，书中还可能有缺点和错误，请读者批评指正。

编　　者

1983年2月于合肥

# 目　录

# 第一章　求物理极值的基本方法

## 一　物理学中的函数与极值

### 1.函数及其图形

自然界里的一切物质都处在运动之中。物理学研究物质运动最基本最普遍的形式，包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核内的运动等等。在某个具体运动过程中，各种变化的物理量之间都存在着一定的依赖关系。例如，竖直上抛物体运动（图1—1）。物体的位置 y、速度v和时间t的关系为

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 - gt$$

式中 $y_0$ 为初位置，$v_0$ 为初速度，g 为重力加速度，这些都是常数。给定 t 值，就可以根据上式确定对应时刻物体的位置和速度。

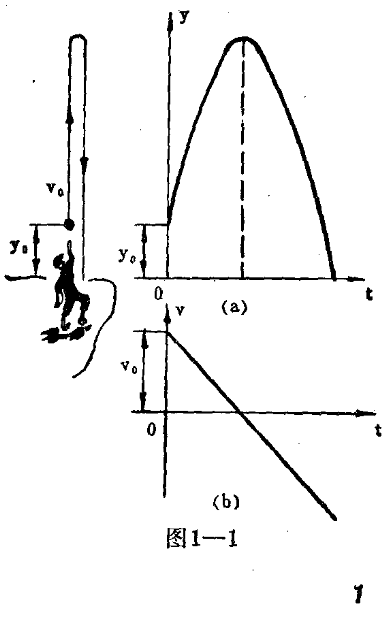


图1—1

在数学上定义：两个互相联系的变量 x 和 y，若对应于 x 的每一值，按一定规律就可以确定对应的 y 值，我们就称 y 是x的一元函数，并记作：

$$y=F(x) \quad \text{或者} \quad y=\phi(x)$$

式中 x 叫自变量，y 叫因变量。F、$\phi$ 是一个函数的记号，它表示一定的对应规律。在物理学中，描写任何一个规律的公式都表示一个量依赖于另一个量的函数关系式。

在函数关系中，自变量可能取的值的全体叫做函数的定义域。在物理学中，函数关系是由具体问题给出的，所以函数的定义域要根据所给问题的具体条件来确定。例如，一个重物从 H 米高空自由落下，高度与下落时间的关系为

$$h=H-\frac{1}{2}gt^2$$

式中 h 是所求的高度，g 是重力加速度，t 是下落时间。

依题意，函数值域 $0\leqslant h\leqslant H$。于是，我们得到自变量 t 的允许值范围是

$$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

物理学中，表示函数关系的方法有下面三种：

(1)公式法：用数学方程把自变量和因变量的依赖关系表示出来。

(2)列表法：把一系列的自变量数值与其对应的函数值列成表格。物理实验常用这种方法记录实验结果。

(3)图象法：利用平面曲线图形直观地表达两个函数之间的关系。

公式法表达的函数关系清楚，容易从自变量的值求出对

应的函数值，便于利用分析法讨论函数的性质。列表法和图象法可以表示出实验中已发现而准确数学形式尚未确知的关关；即使数学方程已知，利用图象法在很大程度上其关系的意义表现得更加明显。下面几个例子可看出各自的作用。

**例1**　图 1—1 所示上抛物体的动能、势能和总能量与时间t的关系为

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2$$

$$U_P = mgh = mg\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$W = E_K + U_P = \frac{1}{2}mv_0^2。$$

函数图象如图1—2所示。可见，在重力场中，忽略空气阻力时，系统内的动能和势能可以互相转换，但它们的总和保持不变。对应某时刻 $t_0$，势能最大，动能为零。

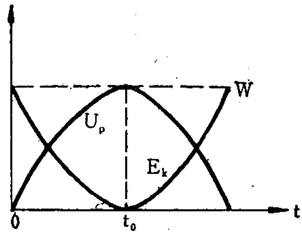



图1—2

**例2**　直流电路图1—3(a)，给定电源电动势 $\varepsilon$，内阻 r。电源功率N，电源输出功率 $N_a$ 及效率 $\eta$ 与电流强度 I 间的函数关系为

$$N = \varepsilon I$$

$$N_a = (\varepsilon - Ir)I$$

$$\eta = \frac{N_a}{N} = \frac{\varepsilon - Ir}{\varepsilon}$$

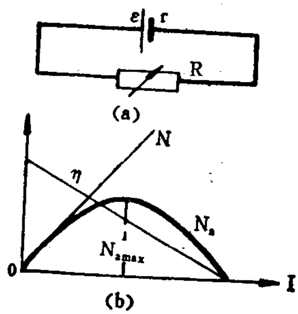
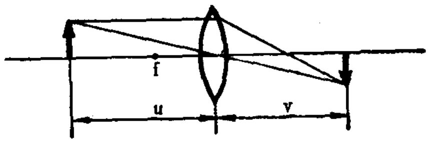



图1—3

作函数图象如图1—3(b)所示。可见，对应某电流$I_0$，电源有最大输出功率。

**例3** 透镜成像（图1—4(a)）。物距u、像距v与透镜焦距f的函数关系为

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}$$




(a)

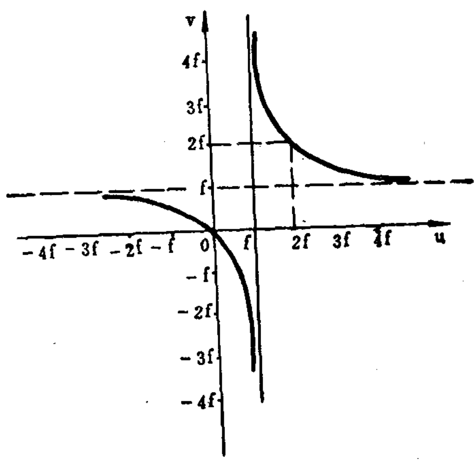



图1—4 (b)

函数图象为一正斜双曲线，如图1—4所示。从图形上可以看出物和象的性质，若物距u变化范围是$(2f, \infty)$，则像是倒立、实像、缩小的。若物距$u=2f$，则像距$v=2f$，像是倒立、实像、同大的。

在物理学中，每个公式不论其形式如何，都反映了一个量依赖于另一个量(或多个量)的函数关系。在不少函数关系中，出现函数有极大(小)值或最大(小)值的问题。譬如：

**问题一** 图1—1中，什么时候物体上升高度最大？什么时候物体动能最小，势能最大？

**问题二** 图1—3中，电路中电流是多大时，电源输出功

率最大?

**问题三** 图1—4中，当物体在1.5f和3f之间移动，物距为多大时物与像之间的距离最短?

**问题四** 一个电灯安装多高时，桌子边缘可以获得最大照度?

……

这类问题很多，一般都可以用数学方法求解。下面我们先简单地介绍一下极值的概念、极值与最大(小)值的区别，再介绍求极值的数学方法。

**2.函数的极值与最大值、最小值**

如果一物体在重力场中，沿某起伏山坡，无摩擦地滑动，则势能曲线与山坡的形状有关(图1—5)。从图形上可以看出,对应自变量 $x=c_1$，$c_3$ 各点的势能函数值，大于对应于c的邻域内各点的一切函数值。我们说，势能函数 $U(x)$ 在 $c_1$，$c_3$ 处有极大值。记

$$U_{max}=U(c_1)$$

$$U_{max}=U(c_3)$$

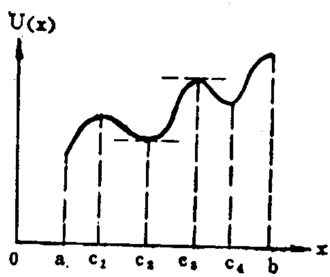


图1—5

数学上定义:函数 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处有极大值，即在这点的函数值大于邻近各点的函数值。也就是说，在十分接近c的一切x值，满足不等式

$$f(c)>f(x)$$

从图形上还可以看出，对应自变量 $x=c_2$，$c_4$ 各点的势能函数值，小于对应于c的邻域内各点的一切函数值。我们说,势能函数 $U(x)$ 在 $c_2$，$c_4$ 处有极小值。记

$$U_{min}=U(c_2)$$
$$U_{min}=U(c_4)$$

数学上定义：函数f(x)在点x=c处有极小值，即在这点的函数值小于邻近各点的函数值。也就是说，在十分接近于c的一切x值满足不等式

$$f(c)<f(x)$$

函数的极大值和极小值，总称"极值"。物理学中出现的极值问题，多数是求函数的最大值和最小值问题。如图1—5，在区间〔a，b〕内函数的最大值不是在极大值点$c_1$，$c_3$处取得，而是在x=b处取得；函数的最小值不是在极小值点$c_2$，$c_4$处取得，而是在x=a处取得。所以极值是对某点邻域而言，反映局部性质；最大值或最小值是全部值域内函数的最大值或最小值，反映全局性质。又如，选择性光电效应，入射光波长与电流之间的函数关系如图1—6所示。这种现象可以在光照射到碱金属上得到。它的特点是，如果用某一定波长的辐射光来照射碱金属，就有最大的电子发射；如果用较大或较小的波长的射线来照这同一金属，那么照出的电子数就较少。显然，入射波长在〔$\lambda_1$，$\lambda_4$〕范围内，函数I的最大值在$\lambda_3$处取得；函数I的最小值不是在极小值点$\lambda_2$处取得，而是在$\lambda_4$处取得，即

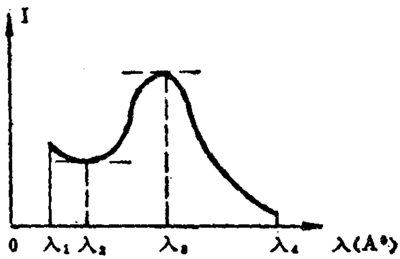


图1—6

$$I_{max}=I(\lambda_3)$$
$$I_{min}=I(\lambda_4)$$

一般地判断函数最大值或最小值的方法是：求出函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$的所有极大值和极小值后，再把它与区间端点的函数值比较，其中最大的数值就是这个函数的最大值，最小的数值就是这个函数的最小值。如果函数在开区间内的一点达到最大值，这个最大值显然也就是极大值。在物理问题中，多数是在所讨论的范围内仅有一个极值，则可断定这个极值就是最大值或最小值。

**3. 从实际问题建立函数关系式**

运用数学知识解决物理实际问题，必须首先把物理问题中，各物理量之间的函数关系建立起来，这是用数学知识解决实际问题重要的一环。从实际问题建立函数表达式一般的过程是：

(1)审题。通过认真阅读、思索，明确题中阐述的物理现象和发生的物理过程。

(2)绘制图形。尽可能将题意用图形表示出来，明确物理量之间的从属关系。

(3)建立函数表达式。根据物理变化过程中各物理量遵循的规律，分析它们之间的内在联系，并用函数表达式反映出来。

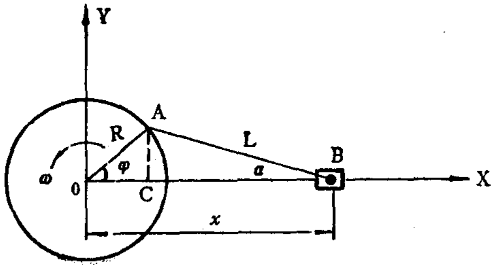


图1—7

**例1** 曲柄连杆机构是由曲柄、连杆及滑块组成的(图1-7)。当曲柄OA绕O轴转动时，由于连杆AB的带动，滑块B作

直线运动，求滑块B的位置随时间变化规律。

**解** 建立如图坐标系，选择 O 为坐标原点。已知曲柄 OA $=R$，以匀角速 $\omega$ 绕 O 轴转动，连杆 $AB=L$。R、L、$\omega$ 都是常量，现在我们分析滑块 B 的运动。

当曲柄 OA 匀速转动时，由于连杆AB的带动，滑块 B 在 x 轴线上，时而向左，时而向右作往复运动。显然，滑块 B 的位置 x 随角 $\phi$ 而变化。任一瞬时滑块 B 的位置为

$$x=OC+CB=R\cos\phi+L\cos\alpha$$

式中 $\phi=\omega t$。把 $\alpha$ 表示成时间 t 的函数关系。由三角形 OAC 及 ACB 得到

$$R\sin\phi=L\sin\alpha$$

或
$$\sin\alpha=\frac{R}{L}\sin\phi$$

于是
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2\sin^2\varphi}$$

把上式代入 x 的表达式，得滑块 B 的位置随时间的变化规律为

$$x=R\cos\omega t+\sqrt{L^2-R^2\sin^2\omega t}$$

若由二项式定理展开 $\cos\alpha$，得

$$\cos\alpha=1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2\sin^2\phi+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\times 2}\left(\frac{R}{L}\right)^4\sin^4\phi\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2\sin^2\phi-\frac{1}{8}\left(\frac{R}{L}\right)^4\sin^4\phi\cdots\cdots$$

因为一般 R/L 均小于 1，从第三项起以后的所有各项均可略去，于是

$$\cos\alpha \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2\sin^2\phi$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2\left(\frac{1-\cos2\phi}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2\cos2\phi$$

代入运动方程后，则得

$$x=R\cos\omega t+L\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2\cos2\omega t\right]$$

$$=L\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]+R\left[\cos\omega t+\frac{1}{4}\frac{R}{L}\cos2\omega t\right]$$

讨论：$\phi$为何值时，$\alpha$有最大值。

∵　　$R\sin\phi=L\sin\alpha$

∴　　当 $\sin\phi=1$，$\phi=\frac{\pi}{2}$时，$\alpha$有最大值，即

$$\sin\alpha=\frac{R}{L}$$

$$\alpha_{\max}=\arcsin\frac{R}{L}$$

**例2**　滑线变阻器可用作分压器，用法如图1—8所示。R是变阻器全电阻，r是负载电阻，电源电动势是$\varepsilon$，内阻是$r_0$，c是R上的滑动触头。滑动c，就可在r上得到不同的电压$U_r$。设R的长度ab=L，R上各处单位长度的电阻都相同，a、c之间的长度ac=x，求负载两端电压$U_r$随x变化的函数关系。

**解**　触头c将整个滑线电阻R分成两部分：Rx/L及R/L(L－x)，负载r与Rx/L并联。当x接近于零，r上的电压$U_r$也接近于零，随着x增大，$U_r$也逐渐增大，当x接近L时，$U_r$