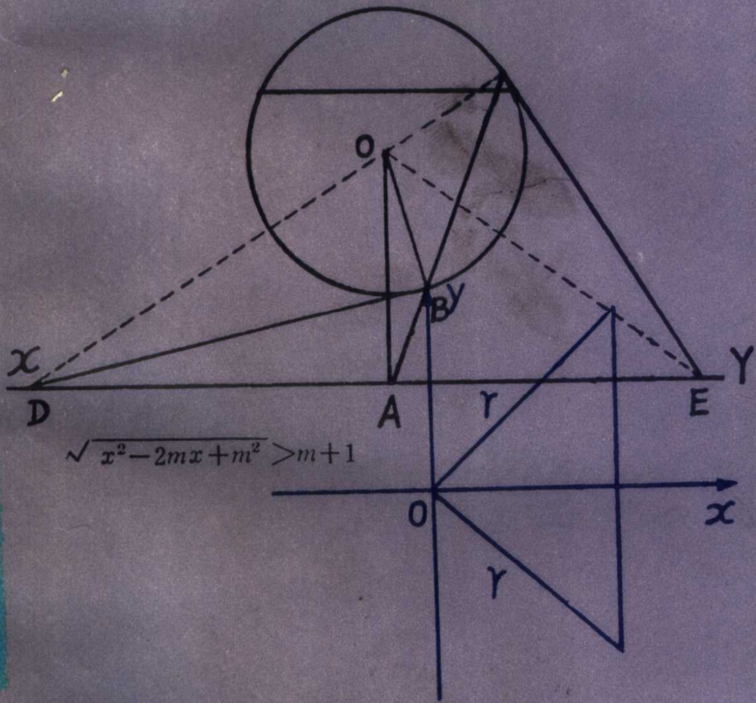
高中

数学教材

补充题

第四册



浙江人民出版社

高中数学教材补充题

（第四册）

许纪传　钱孝华　江焕棣
陶敏之　谢玉兰　丁宗武

浙 江 人 民 出 版 社

高中数学教材补充题

（第四册）

*

浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥境）
浙江省新华书店发行

开本787×1092 1/32 印张1.125 字数92,000
1981年10月第 一 版
1983年2月第三次印刷
印数：98,001—213,000

统一书号：7103·1185
定 价：0.30 元

说　　明

近年来适应读者需要，各类习题集纷纷出版，但要在如此纷繁的题目中精选出适合学生练习的题目，却也得耗费教师学生许多精力和时间。为此，我们从多年积累的大量资料中精选出与现行高中数学教材有密切联系的习题若干，按内容分类编辑，供教师学生选择使用。编选过程中把重点放在加强基础知识和基本技能的训练上，注意习题类型的多样化和内容的新颖，重视综合运用。并本着少而精的原则，选择从严，避免增加学生作业负担，力求对课堂教学和提高学生分析解决问题的能力有所帮助。

全书按教材内容顺序分段编排，其中A组属于基本题，B组略有提高和带有一定的综合性，C组难度较大，系供学有余力的学生练习。教师学生可以根据实际情况灵活选用，不要强求一律。

本书在编选中得到王祖樾老师的热忱帮助，提出许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢。

一九八一年八月

目　　录

第七章　数列和极限

一、数　列

（A）

1．(1) 等差数列-2，$1\frac{1}{2}$，5，……的第几项是$22\frac{1}{2}$？

(2) 等差数列3，3.2，3.4，……从哪一项起，其后每一项的数值大于1000？

(3) 等差数列的首项是2，第2项与第3项分别是两个连续自然数的平方，求此数列.

2．(1) 某等差数列前五项的和是25，第8项是15，求它的首项与公差；

(2) 等差数列1，4，7，……，100共有几项？它的和是多少？

(3) 求证：等差数列8，16，24，……前n项的和加1必是一奇数的平方.

3．在等差数列中，

(1) 若第11项是20，求前21项的和；

(2) 若第4、7、10、13这四项的和是20，求前16项的和；

(3) 若前4项的和是68，第6项至第10项的和是30，求第15项至第30项的和.

4．(1) 有一项数为10的等差数列，其偶数项的和是15，奇数项的和是12.5，求它的首项与公差；

(2) 有一项数为 $2n+1$ 的等差数列，求它的奇数项总和与偶数项总和之比.

5．(1) 若等差数列的第 p 项是 q，第 q 项是 p，求它的第 $p+q$ 项及前 $p+q$ 项的和；

(2) 等差数列中，若前 p 项的和与前 q 项的和相等($p\neq q$)，求前 $p+q$ 项的和；

(3) 若首项为 a 的等差数列的前 p 项的和是零，求它后面 q 项的和.

6．(1) 已知三数 a、b、c 成等差数列，且 a^2、b^2、$-c^2$ 也成等差数列 ($b\neq 0$)，求 $a:b$；

(2) 已知五个角成等差数列，中间角的余弦值(不等于零)刚好是其它各角余弦值的和，求其公差的余弦值.

注意： 对连续奇数个项的等差数列，通常可设为……，$x-2d$，$x-d$，x，$x+d$，$x+2d$，……；对连续偶数个项的等差数列，通常可设为……，$x-3d$，$x-d$，$x+d$，$x+3d$，…….

7．(1) 某等差数列的第 p 项是 M，第 q 项是 N，第 r 项是 K，求证 $M(q-r)+N(r-p)+K(p-q)=0$；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的三边 a、b、c 依次成等差数列，求证：

① $\triangle ABC$ 的内切圆半径是 b 边上高的$\dfrac{1}{3}$，

② $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$；

(3) 已知$\dfrac{1}{\cos(\varphi-\theta)}$、$\dfrac{1}{\cos\varphi}$、$\dfrac{1}{\cos(\varphi+\theta)}$成等差数

列，且φ是锐角，θ是钝角，求证$\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

8. (1) 求证a、b、c成等差数列的充要条件是$2b=a+c$；

(2) 已知$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$成等差数列，求证$\frac{b+c-a}{a}$、$\frac{c+a-b}{b}$、$\frac{a+b-c}{c}$也成等差数列；

(3) 在$\triangle ABC$中，若$\angle A=2\angle B$，且$\angle C$的平分线将三角形面积分成$1:\sqrt{3}$两部分，求证此三角形的三内角成等差数列.

9. 在凸多边形中，已知它的内角度数组成公差是$5°$的等差数列，且最小内角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，问它是几边形？

10. (1) 如一数列的通项公式是$a_n=3n-1$，它是不是等差数列？

(2) 如一数列的通项公式是$a_n=kn+b$（k、b是常数），它是不是等差数列？

(3) 从(1)、(2)中，你能得到一个什么结论？

11. (1) 若一数列的第n项为$\log_3\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3^{2n+1}}}$，求此数列前$n$项的和；

(2) 已知数列的通项公式是$a_n=2n-1$，求s_n、a_{a_n}、a_{s_n}、s_{a_n}、s_{s_n}.

12. (1) 首项a_1是正数的等差数列，已知$s_9=s_{17}$，问它前多少项的和最大？最大值是多少？

(2) 等差数列的第10项为210，第30项为-230.

① 它的前多少项的和最大？

② 取它的奇数项组成另一数列 $\{b_n\}$，求它的通项公式 b_n.

13．(1) 如正数 a_1，a_2，……，a_n，……成等比数列，问数列 $\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，……，$\frac{1}{a_n}$，……成什么数列？

(2) “公比是正数的等比数列一定是递增数列，公比是负数的等比数列一定是递减数列”，这结论对吗？

(3) 各项为正的数列 $\{a_n\}$ 成公比是 q 的等比数列，问数列 $\{\sqrt{a_n}\}$、$\{a_n^k\}$ 成什么数列（ k 为常数）？

14．(1) 某等比数列的第 1 项与第 3 项的和是 5，第 2 项与第 4 项的和是10，求它的前四项；

(2) 三数成等比数列，其和是26，其平方和是364，求这三个数；

(3) 各项都是正数的等比数列共七项，前三项的和是26，后三项的和是2106，求第四项；

(4) 一首项为 4 且公差不为零的等差数列的第 1 、7 、10 三项刚好是某一等比数列的前三项，求此等比数列的第 5 项到第 9 项的和.

注意：(1) 已知三数成等比数列，若其和已知，可设三数为 a、aq、aq^2，若其积已知，则设三数 $\frac{a}{q}$、a、aq 为好；

(2) 一般地，连续奇数个项的等比数列，以设……，$\frac{a}{q^2}$，$\frac{a}{q}$，a，aq，aq^2，……为宜，而连续偶数个项的等比数列，以设……，$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3，……为宜.

15．(1) 求证：三数 a、b、c 成等比数列的充要条件是 $b^2=ac$；

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a、b、c 成等比数列，求证：

① $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 成等比数列，

② a^2+b^2、$ab+bc$、b^2+c^2 成等比数列，

③ $\cos(A-C)=1-\cos B-\cos 2B$.

16. 三数成等差数列，其和是24. 若首尾两数各加上 2，它们又成等比数列，求原来三数.

17. (1) 已知 α、β、γ 成等差数列，公差是 π 的整数倍，求证 $\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\sin\gamma$ 成等比数列；

(2) 若 a、b、c 满足 $(a-b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2$，求证 a、b、c 成等比数列；

(3) 已知某等比数列的第 p、q、r 项也成等比数列，求证 p、q、r 成等差数列；

(4) 若两数的等差中项是 A，等比中项是 G，求证这两数为 $A\pm\sqrt{(A+G)(A-G)}$.

18. (1) 计算 $1+i+i^2+\cdots\cdots+i^{102}$；

(2) 已知 $\lg x+\lg x^2+\cdots\cdots+\lg x^{10}=110$，求

$$\lg x+\lg^2 x+\lg^3 x+\cdots\cdots+\lg^{10} x;$$

(3) 求 n，使 $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdots 2^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-21}$；

(4) 求数列 $1\frac{1}{2}$，$4\frac{1}{4}$，$7\frac{1}{8}$，$10\frac{1}{16}$，…前10项的和.

19. 解关于 x 的方程：

$$1+a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^x$$
$$=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8),\ (a\neq -1).$$

20. 圆心在同一直线上的 n 个圆，若相邻的两圆都相外切，半径 $\{r_n\}$ 是首项为 1 、公比为 2 的等比数列，求通项公式 r_n，再求第一个圆的圆心到第 n 个圆的圆心间的距离.

(B)

21．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=pa_n+q$，且 $a_2=3$，$a_4=15$，求 p、q。

22．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$（a、b为常数，$a\neq0$），满足$f(2)=1$，且 $f(x)=x$ 有唯一解。

(1) 求 $f(x)$ 的表达式；

(2) 如记数列 $x_n=f(x_{n-1})$，且 $x_1>0$，($n>1$，$n\in N$)。求证数列$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$成等差数列。

23．已知 $\log_m x$、$\log_n x$、$\log_k x$ 成等差数列，求证

$$k^2=(mk)^{\log_m n}，(x\neq1)。$$

24．(1) 已知 $\triangle ABC$ 的三内角成等差数列，且 $\log_4\sin A+\log_4\sin C=-1$。若三角形面积是$\sqrt{3}$平方厘米，求三边长；

(2) 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上若三点的横坐标成等差数列，求证这三点到同一焦点的距离也成等差数列。

25．(1) 等差数列1，3，5，7，……前 n 项的和记为 s_n。①要使 s_n 的值是三位数，n 的取值范围如何选取？②要使它的通项 a_n 的值是三位数，n 的取值范围又如何选取？③通项a_n的值为两位数的一切项的和是多少？

(2) 一等差数列第23项是49，第32项是67，值在20与50之间的项是哪些？这些项的和是多少？

26．(1) 数列的通项公式 $a_n=-2[n-(-1)^n]$，求它的前100项的和；

(2) 求$100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots\cdots+4^2-3^2+2^2-1^2$;

(3) 求1，-3，5，-7，9，-11，……前n项的和;

(4) 在a、b两数间插入n个数，使它们与a、b组成一个等差数列，求这个数列的公差d和这组数的和s.

27. 三个互不相等的正数若成等差数列，它们的倒数能成等差数列吗？证明你的结论;

28. (1) 已知一等差数列的前n项的和是25，前$2n$项的和是100，求其前$3n$项的和;

(2) 共$3n$项的等差数列，前n项、中间n项、最后n项之和分别为s_1、s_2、s_3，求证s_1、s_2、s_3也成等差数列;

(3) 一个等差数列依次每k项分成一组，求证每组中各项的和所组成的数列也是等差数列，且公差与原公差的比是$k^2:1$;

(4) 若一等差数列$\{a_n\}$的前m项、前n项的和分别为s_m、s_n，且$s_m:s_n=m^2:n^2$，求证$a_m:a_n=(2m-1):(2n-1)$.

29. (1) 已知数列$\{a_n\}$成等差数列，求证:

① $$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}},\ (a_k>0,\ k\in N),$$

② $$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\cdots+a_{2n-1}^2-a_{2n}^2$$

$$=\frac{n}{2n-1}(a_1^2-a_{2n}^2);$$

(2) 已知数列$\{a_n\}$各项的倒数成等差数列，求证

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n.$$

30. (1) 在项数为奇数的等差数列中，它的奇数项的和是60，

偶数项的和是45，求这个数列的中间项和项数；

(2) 如两个等差数列：5，8，11，……与3，7，11，……都有100项，问它们有多少个相同的项？

31. 已知数列通项 $a_n=\lg(10^5\cdot 5^{1-n})$，问此数列前多少项的和最大 ($\lg 2=0.3010$)？

32. 把63表示成 n 个连续自然数的和，试求出各种可能的表示法.

33. (1) 若三角形三内角成等差数列，求证最大边与最小边之和不大于另一边的两倍；

(2) 若三角形三边成等差数列，最大角与最小角相差90°，求证三边之比为$(\sqrt{7}-1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}+1)$；

(3) 已知 M、K 分别为 $\triangle ABC$ 的重心与内心，且 $MK\parallel BC$，求证 $\triangle ABC$ 的三边成等差数列；

(4) 已知等腰梯形四边中点的连线组成一矩形，求证梯形的上底 a、腰 b、下底 c 各自的平方成等差数列.

34. 养路工人沿着公路存放碎石20堆，每相邻两堆间的距离是200米，碎石场离最近一个存放点是1500米，每堆碎石需拉3车（用一辆汽车拉），问完成这个任务车子来回需行多少路程？

35. (1) 若等比数列的第 p、q、r 项分别是 P、Q、R，求证 $P^{q-r}Q^{r-p}R^{p-q}=1$；

(2) 若 a、b、c 分别是一等差数列的第 p、q、r 项，同时又是另一个等比数列的 p、q、r 项，求证 $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=1$；

(3) 已知 a、b、c 是成等比数列的三个正数，且公比不等于1，求证 $a^n+c^n>2b^n$，$(n\in N)$.

36. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差与等比数列 $\{b_n\}$ 的公比都是 d

$(d\neq 0,1)$，且 $a_1=b_1$，$a_4=b_4$，$a_{10}=b_{10}$.

(1) 求 a_1 与 d 的值；

(2) b_{16} 是不是 $\{a_n\}$ 中的项？如是，是第几项？

37．(1) 若三个不等的数 a、b、c 成等差数列，又 a、c、b 成等比数列，试用 a 表示这三个数；

(2) 若 a、b、c 成等比数列，且 x 为 a、b 的等差中项，y 为 b、c 的等差中项，求证 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$；

(3) 如 $\sin 2x$ 和 $\sin x$ 分别是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的等差中项与等比中项，求 $\cos 2x$；

(4) 若 b 是 a、c 的等比中项，求证

$$\frac{1}{2}\log_b N=\frac{\log_a N\cdot\log_c N}{\log_a N+\log_c N},$$

（a、b、c、N 都是正数）.

38．(1) 若三角形的三个角成等差数列，且三条边成等比数列，求证它是等边三角形；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的三边 a、b、c 成等比数列，求公比的取值范围；

(3) 若 $\triangle ABC$ 的三边 a、b、c 成等比数列，求证：

①三角形分别以 BC、CA、AB 为轴旋转一周所得的旋转体的体积 V_a、V_b、V_c 也成等比数列，

②以它的三条高为边所组成的三角形与原三角形相似.

39．(1) 如方程 $p^2x^2+q^2x+r^2=0$ 的两根分别为方程 $px^2+qx+r=0$ 的两根的平方，求证 p、q、r 成等比数列；

(2) 若方程 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ 有实根，(a、b、c 为非零实常数)，求证 a、b、c 成等比数列，且

公比是方程的根；

(3) 已知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 与 $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{b}+\frac{1}{c}=0$ 有一公共根，且 $a+b+c=0$，求证 $a^2(b-c)$、$b^2(c-a)$、$c^2(a-b)$ 成等比数列；

(4) 已知两数 x_1、x_2 满足：①它们的和是等差数列 1，3，5，……的第20项，②它们的积是等比数列 2，－6，18，……的前四项的和，求以 $\frac{1}{x_1}$、$\frac{1}{x_2}$ 为根的一元二次方程；

(5) $\triangle ABC$ 的边 b 是边 a、c 的等差中项，而 $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ 是 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$、$\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ 的等比中项，求以 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$、$\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ 为根的一元二次方程.

40. (1) 已知 $\lg 2=0.3010$，且 $\lg\sqrt{8y^2-1}=\lg(x+\sqrt{x^2-1})+\lg(x-\sqrt{x^2-1})$，求各项都是正数的等比数列 2，$2y$，$2y^2$，……中取其各项的对数的前 10 项的和；

(2) 方程 $x^2+x\sin 2\theta-\cos\theta=0$ 的两根设为 α、β，问当 θ 取何值时，等比数列 1，$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$，$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2$，……的前100项的和为零？

41. (1) 若等比数列前 n 项的和是 A，积是 B，倒数的和是 C，求证 $B^2=\frac{A^n}{C^n}$；

(2) 若等比数列的公比 q 满足 $o<q<\frac{1}{2}$，求证数列中任意

一项的绝对值都大于这一项以后任意项之和的绝对值.

42．求证：首项为 a、公比为 9 的等比数列前 n 项的和，一定等于首项为 a、公差为 a 的等差数列前若干项的和.

43．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1、公比 q 都大于 1，求证：

$$\frac{1}{\sqrt{\log_2 a_1}+\sqrt{\log_2 a_2}}+\frac{1}{\sqrt{\log_2 a_2}+\sqrt{\log_2 a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\log_2 a_{n-1}}+\sqrt{\log_2 a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{\log_2 a_1}+\sqrt{\log_2 a_n}}.$$

44．求和：

(1) $2\frac{1}{3}+4\frac{1}{9}+6\frac{1}{27}+8\frac{1}{81}+\cdots\cdots$ 至 n 项；

(2) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2+\cdots+\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)^2$,

$(a\neq\pm1)$；

(3) ①$0.9+0.99+0.999+0.9999+\cdots\cdots$ 至 n 项，

②$0.1+0.11+0.111+0.1111+\cdots\cdots$ 至 n 项，

③$0.5+0.55+0.555+0.5555+\cdots\cdots$ 至 n 项.

45．顺次连接边长为 a 的正六边形各边中点，得一小正六边形，再连接所得正六边形各边中点，又得一小正六边形，如此继续进行，求前10个正六边形面积之和.

二、极　　限

（A）

46．已知数列：① $a_n=\dfrac{1}{n}$，② $a_n=-\dfrac{1}{n}$，③ $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，

④ $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

（1）将这些数列的前五项在数轴上表示出来；

（2）计算它们的第 n 项与零的差的绝对值；

（3）用数列极限的定义分别确定它们的极限；

（4）比较它们趋向于零的“方式”有何不同.

注意：　（1）只有无穷数列才可讨论有无极限；

（2）从本题中可以看到：数列按什么“方式”趋近于极限可以是多种多样的，但是极限可以是同一个.

47．写出下列各数列的前六项，并“估计”它们有没有极限：

（1）$a_n=1+(-1)^n$；　　（2）$a_n=2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$；

（3）$a_n=(-1)^n\operatorname{tg}\left(\dfrac{n\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$；（4）$a_n=4+(-1)^n\cdot\dfrac{n+1}{n}$.

48．你能举出四个极限都是 3 的无穷数列吗？

49．（1）写出四个公差不是零的无穷等差数列，再说明它们有没有极限；

（2）写出公比绝对值大于 1 与小于 1 的无穷等比数列各两个，再说明它们有没有极限.

注意：　公差不是零的无穷等差数列没有极限；而公比绝对值不是 1 的无穷等比数列可以有极限（公比绝对值小于 1），