大学文科数学解题指南

北京大学数学科学学院

姚孟臣 编著

3

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校文科类各专业使用

大学文科数学解题指南

姚孟臣　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学解题指南/姚孟臣编著. —北京:北京大学出版社,2005.11

ISBN 7-301-08597-4

Ⅰ.大… Ⅱ.姚… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 120523 号

书　　　名:大学文科数学解题指南

著作责任者:姚孟臣　编著

责 任 编 辑:曾琬婷

标 准 书 号:ISBN 7-301-08597-4/O·0636

出　版　者:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科部 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者:北京大学印刷厂

发　行　者:北京大学出版社

经　销　者:新华书店

890mm×1240mm　A5　15.5 印张　475 千字

2005 年 11 月第 1 版　2005 年 11 月第 1 次印刷

印　　　数:0001—4000 册

定　　　价:23.00 元

前　言

20世纪70年代以来，我们为北京大学等院校文科各系各专业讲授“高等数学”课程期间，在课程内容体系上进行了多次改革，先后编写了《大学文科基础数学》、《文科高等数学教程》和《大学文科高等数学》等多部教材，深受广大师生的好评.

文科高等数学(包括微积分、线性代数和概率统计)是文科类各专业的一门基础课.针对目前全国各高校的不同专业方向对基础数学要求有一定差异，在总学时不多的情况下，编写一套能够科学地阐述高等数学的基本内容、全面系统地介绍有关基本原理和基本方法的简明易懂的教材尤为重要.

根据高等教育面向21世纪教学内容和课程改革总目标的要求，结合作者三十年来讲授文科高等数学课程的实践，我们又编写了这套教材《大学文科数学简明教程》，其中包括主教材《大学文科数学简明教程(上册)》、《大学文科数学简明教程(下册)》以及与之配套的辅导教材《大学文科数学解题指南》共三册.本套教材包括三部分内容：第一部分“微积分”，第二部分“线性代数”，第三部分“概率统计”.第一部分“微积分”编写在上册，上册共分五章，内容包括函数与极限、一元函数微分学、中值定理和导数的应用、一元函数积分学、多元函数微积分.在附录中还分别介绍了无穷级数与常微分方程的有关知识.第二部分“线性代数”和第三部分“概率统计”编写在下册，下册共分为五章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、初等概率论与数理统计基础等.讲授以上全部内容可以安排在两个学期，按每个学期17周，每周3个学时计算，

总共需要102个学时.本套教材按章配备了适量的习题,书末附有答案与提示,供教师和学生参考.

本套教材可作为一般院校文科类各专业的数学基础课教材,又可作为自学考试高等数学(一)"微积分"课程的主教材使用.对于"微积分"课程要求较低的理工科各专业也可选用本教材.

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请广大读者批评指正.

编　者

2004年6月8日于

北京大学中关园

目　　录

第一部分　微　积　分

第一章　函数与极限 …… (1)
§1　函数 …… (1)
内容提要 …… (1)
典型例题分析 …… (4)
习题 1.1 …… (9)
§2　极限的概念、性质和极限的计算 …… (11)
内容提要 …… (11)
典型例题分析 …… (16)
习题 1.2 …… (22)
§3　函数的连续性 …… (25)
内容提要 …… (25)
典型例题分析 …… (28)
习题 1.3 …… (31)
第二章　导数与微分 …… (33)
§1　导数的概念及其运算 …… (33)
内容提要 …… (33)
典型例题分析 …… (37)
习题 2.1 …… (46)
§2　微分的概念及其运算 …… (49)
内容提要 …… (49)
典型例题分析 …… (52)
习题 2.2 …… (56)

第三章　中值定理和导数的应用 ……………………………… (57)
§1　中值定理 …………………………………………… (57)
内容提要 …………………………………………… (57)
典型例题分析 ……………………………………… (59)
习题 3.1 …………………………………………… (63)
§2　洛必达法则 ………………………………………… (64)
内容提要 …………………………………………… (64)
典型例题分析 ……………………………………… (66)
习题 3.2 …………………………………………… (70)
§3　利用导数研究函数 ………………………………… (71)
内容提要 …………………………………………… (71)
典型例题分析 ……………………………………… (74)
习题 3.3 …………………………………………… (82)
第四章　一元函数积分学 ……………………………………… (84)
§1　不定积分的概念 …………………………………… (84)
内容提要 …………………………………………… (84)
典型例题分析 ……………………………………… (87)
习题 4.1 …………………………………………… (90)
§2　不定积分的两个重要积分法 ……………………… (91)
内容提要 …………………………………………… (91)
典型例题分析 ……………………………………… (95)
习题 4.2 …………………………………………… (103)
§3　定积分的概念和基本性质 ………………………… (105)
内容提要 …………………………………………… (105)
典型例题分析 ……………………………………… (109)
习题 4.3 …………………………………………… (113)
§4　定积分的两个重要积分法与变上限的定积分 …… (114)
内容提要 …………………………………………… (114)
典型例题分析 ……………………………………… (116)
习题 4.4 …………………………………………… (122)
§5　定积分的应用与反常积分 ………………………… (124)

内容提要 …………………………………………………… (124)
典型例题分析 ………………………………………………… (126)
习题 4.5 …………………………………………………… (130)
第五章　多元函数微积分……………………………………… (131)
§1　二元函数的极限与连续 ……………………………… (131)
内容提要 …………………………………………………… (131)
典型例题分析 ………………………………………………… (133)
习题 5.1 …………………………………………………… (138)
§2　偏导数和全微分 ……………………………………… (139)
内容提要 …………………………………………………… (139)
典型例题分析 ………………………………………………… (142)
习题 5.2 …………………………………………………… (149)
§3　二元函数的极值 ……………………………………… (150)
内容提要 …………………………………………………… (150)
典型例题分析 ………………………………………………… (152)
习题 5.3 …………………………………………………… (158)
§4　二重积分 ……………………………………………… (159)
内容提要 …………………………………………………… (159)
典型例题分析 ………………………………………………… (163)
习题 5.4 …………………………………………………… (168)

第二部分　线 性 代 数

第一章　行列式……………………………………………… (170)
§1　行列式的定义与性质…………………………………… (170)
内容提要 …………………………………………………… (170)
典型例题分析 ………………………………………………… (173)
习题 1.1 …………………………………………………… (178)
§2　克莱姆法则 …………………………………………… (181)
内容提要 …………………………………………………… (181)
典型例题分析 ………………………………………………… (182)

习题 1.2 …………………………………………………… (184)
第二章　矩阵 …………………………………………………… (186)
§1　矩阵及其运算 …………………………………………… (186)
内容提要 …………………………………………………… (186)
典型例题分析 ……………………………………………… (190)
习题 2.1 …………………………………………………… (194)
§2　矩阵的分块运算 ………………………………………… (195)
内容提要 …………………………………………………… (195)
典型例题分析 ……………………………………………… (197)
习题 2.2 …………………………………………………… (200)
§3　矩阵的逆与矩阵的秩 …………………………………… (202)
内容提要 …………………………………………………… (202)
典型例题分析 ……………………………………………… (205)
习题 2.3 …………………………………………………… (213)
第三章　线性方程组 ……………………………………… (215)
§1　线性方程的消元解法 …………………………………… (215)
内容提要 …………………………………………………… (215)
典型例题分析 ……………………………………………… (217)
习题 3.1 …………………………………………………… (223)
§2　向量的运算与向量间的线性关系 ……………………… (224)
内容提要 …………………………………………………… (224)
典型例题分析 ……………………………………………… (228)
习题 3.2 …………………………………………………… (231)
§3　向量组的秩 ……………………………………………… (232)
内容提要 …………………………………………………… (232)
典型例题分析 ……………………………………………… (234)
习题 3.3 …………………………………………………… (238)
§4　线性方程组解的结构 …………………………………… (239)
内容提要 …………………………………………………… (239)
典型例题分析 ……………………………………………… (240)
习题 3.4 …………………………………………………… (247)

第三部分　概 率 统 计

第一章　初等概率论…………………………………………（249）
§1　随机事件与概率 ……………………………………（249）
内容提要 ……………………………………………（249）
典型例题分析 ………………………………………（252）
习题 1.1 ……………………………………………（259）
§2　条件概率、乘法公式与全概公式 …………………（260）
内容提要 ……………………………………………（260）
典型例题分析 ………………………………………（262）
习题 1.2 ……………………………………………（267）
§3　一维随机变量 ………………………………………（268）
内容提要 ……………………………………………（268）
典型例题分析 ………………………………………（274）
习题 1.3 ……………………………………………（278）
§4　随机向量及其分布 …………………………………（281）
内容提要 ……………………………………………（281）
典型例题分析 ………………………………………（284）
习题 1.4 ……………………………………………（291）
§5　随机变量的数字特征………………………………（292）
内容提要 ……………………………………………（292）
典型例题分析 ………………………………………（296）
习题 1.5 ……………………………………………（300）
第二章　数理统计基础……………………………………（303）
§1　基本概念 ……………………………………………（303）
内容提要 ……………………………………………（303）
典型例题分析 ………………………………………（306）
习题 2.1 ……………………………………………（308）
§2　参数估计 ……………………………………………（309）
内容提要 ……………………………………………（309）

典型例题分析 …………………………………………… (314)
习题 2.2 …………………………………………… (317)
§3 假设检验 …………………………………………… (319)
内容提要 …………………………………………… (319)
典型例题分析 …………………………………………… (325)
习题 2.3 …………………………………………… (327)
习题解答与分析 …………………………………………… (329)
附表 …………………………………………… (476)

第一部分　微　积　分

第一章　函数与极限

§1　函　　数

内 容 提 要

1. 函数的定义

定义 1.1　设 X 是一个给定的非空数集，f 是一个确定的对应关系. 如果对于 X 中的每一个数 x，通过 f 都有 $\mathbf{R}$ 内的惟一确定的一个数 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 X 到 $\mathbf{R}$ 的**函数关系**，简称**函数**，记为

$$f: X \to \mathbf{R} \quad \text{或} \quad f(x) = y.$$

我们把按照函数 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in \mathbf{R}$ 叫做 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y=f(x)$，并把 X 叫做函数 f 的**定义域**，用 D_f 表示，而 f 的全体函数值的集合

$$\{f(x) \mid x \in D_f\}$$

叫做函数 f 的**值域**，通常用 Y 来表示，即

$$Y = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

函数定义中的**两个要素**是：确定的对应关系 f 与定义域 D_f.

定义 1.1 中要求与 x 对应的 y 是“惟一确定”的，即对 X 中每一个值 x，都有一个而且只有一个 y 的值与之对应，故也称定义 1.1 定义的函数为**单值函数**. 相应地，若对于 X 中的某个 x 值，通过关系 f，有多于一个 y 的值与之对应，则此关系 f 叫做**多值函数**. 在微积分中我们一般只讨论单值函数.

2. 函数的几个基本性质

2.1 奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$的定义域 X 为一个对称数集,即任给 $x\in X$ 时,有 $-x\in X$. 若函数 $f(x)$满足

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为**奇函数**;若函数 $f(x)$满足

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**.

注意 奇函数的图形是关于原点对称的,偶函数的图形是关于 y 轴对称的.

2.2 单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x),x\in X$,任给 $x_1,x_2\in(a,b)$且$(a,b)\subset X$. 若 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在(a,b)内是**递增**(或**递减**)的;又若 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在(a,b)内是**不减**(或**不增**)的.

递增函数或递减函数统称为**单调函数**. 同样我们可以定义在无限区间上的单调函数.

2.3 有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$在 X 上有定义. 若存在 $M_0>0$,对于任意的 $x\in X$,使得 $|f(x)|\leqslant M_0$,则称 $f(x)$在 X 上是**有界的**;否则称 $f(x)$在 X 上是**无界的**.

注意 有界函数是指既有上界,又有下界的函数,这里的

$$M_0=\max\{|M|,|m|\},$$

其中 M,m 分别为函数的上界与下界.

2.4 周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$. 若存在 $T_0>0$,对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x+T_0)=f(x)$,则称 $f(x)$是**周期函数**,T_0 为其**周期**.

由定义可知,$kT_0(k\in\mathbf{N})$都是它的周期,可见一个周期函数有无穷多个周期. 若在无穷多个周期中,存在最小的正数 T,则称 T 为

$f(x)$的**最小周期**,简称**周期**.

3. 反函数

定义 1.6 给定函数 $y=f(x)(x\in X,y\in Y)$. 如果对于 Y 中的每一个值 $y=y_0$ 都有 X 中惟一的一个值 $x=x_0$,使得 $f(x_0)=y_0$,那么我们就说在 Y 上确定了 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y)\quad(y\in Y).$$

通常我们称函数 $y=f(x)$为**直接函数**,而用符号“f^{-1}”表示新的函数关系.

习惯上我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因而常把函数 $y=f(x)$的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$的形式. 从而 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的,这是因为这两个函数因变量与自变量互换的缘故.

4. 复合函数

定义 1.7 设 $y=f(u)(u\in U)$,$u=g(x)(x\in X,u\in U_1)$. 若 $U_1\subset U$,则称 $y=f[g(x)](x\in X)$为 $y=f(u)$和 $u=g(x)$的**复合函数**,有时记为 $f\circ g$,并称 u 为**中间变量**.

两个以上的函数也可以进行复合运算,并且满足结合律,即

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

需要指出的是,复合运算与四则运算不同,它没有交换律,即若 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都存在,一般来说

$$f\circ g\neq g\circ f.$$

5. 初等函数

我们所研究的各种函数,特别是一些常见的函数都是由几种最简单的函数构成的,这些最简单的函数就是在初等数学中学过的**基本初等函数:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数**和**反三角函数**.

定义 1.8 基本初等函数经过有限次加、减、乘、除、复合运算所得到的函数,称为**初等函数**.

6. 分段函数

定义 1.9 由两个或两个以上的分析表达式表示的函数，称为**分段定义的函数**，简称为**分段函数**.

注意 一般来说分段函数不是初等函数.

典型例题分析

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}+\sqrt{3x-1}-\lg(2-x)$的定义域.

解 要使 $f(x)$有意义，则必须有：根号内非负，即 $3x-1\geqslant 0$；分母不等于 0，即 $x^2-1\neq 0$；对数的真数为正，即 $2-x>0$. 因此要求满足

$$\begin{cases}3x-1\geqslant 0,\\ x^2-1\neq 0,\\ 2-x>0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x\geqslant \dfrac{1}{3},\\ x\neq \pm 1,\\ x<2,\end{cases}$$

所以
$$D_f=\left[\frac{1}{3},1\right)\cup(1,2).$$

注意 求函数的定义域就是找出解析表达式自变量的取值范围，主要有以下几种情况：

(1) 分式的分母取值不为零；

(2) 偶次根的根底式为非负数；

(3) 对数符号下的真数式子只能是正数；

(4) 反正弦函数、反余弦函数符号下的式子在$[-1,1]$上取值；

(5) 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围的总和；

(6) 由几个函数经过四则运算而构成的函数，其定义域是各个函数定义域的公共部分.

例 2 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\leqslant 1,\\ x+1, & 1<x\leqslant 4,\end{cases}$$
$$g(x)=f(x^2)+f(3+x),$$

求 $g(x)$的定义域.

解 分段函数的定义域是各个定义区间的并集，所以函数 $f(x)$的定义域 $D_f=(0,1]\cup(1,4]$，它表示函数 $f(x)$的自变量的取值范

围为(0,4]. 而函数 $f(x^2)$ 的变量是 x^2，$f(3+x)$ 的变量是 $(3+x)$，因此，由 $0<x^2\leqslant 4$，有 $-2\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 2$；由 $0<3+x\leqslant 4$ 有 $-3<x\leqslant 1$. 可见，$f(x^2)$ 的定义域是 $[-2,0)\cup(0,2]$，而 $f(3+x)$ 的定义域是 $(-3,1]$.

因为 $g(x)$ 的定义域是上述两个定义域的交集，所以 $g(x)$ 的定义域是 $\{[-2,0)\cup(0,2]\}\cap(-3,1]$ 即 $[-2,0)\cup(0,1]$.

注意 这里容易产生的错误是将 $f(x^2)$ 与 $f(3+x)$ 中 x 的变化范围仍为：$0<x\leqslant 4$，因此 $0<x^2\leqslant 16$，而 $3<3+x\leqslant 7$. 这样错误地导出 $f(x^2)$ 的定义域是 $(0,16]$，$f(3+x)$ 的定义域是 $(3,7]$.

例 3 讨论下列函数对中的两个函数是否相同：

(1) $y=x\sqrt{1-x}$ 与 $y=\sqrt{x^2(1-x)}$；

(2) $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$.

解 (1) $y=x\sqrt{1-x}$ 与 $y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 的定义域均为 $(-\infty,1]$. 考虑到

$$y=\sqrt{x^2(1-x)}=|x|\sqrt{1-x},$$

可见其对应规则不同，当 $x<0$ 时，$y=x\sqrt{1-x}<0$，但 $y=\sqrt{x^2(1-x)}>0$. 所以两函数不是相同的.

(2) 由于函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，其对应规则也一样，都是"对任意的 x 值，y 均以 1 与之对应"，因此函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 是相同的.

注意 判断两个函数是否相同，主要要看函数的两个要素"定义域"与"对应规则"是否相同，只有当它们都相同时，函数才是相同的；在两要素中只要有一不同，两函数就是不相同的.

例 4 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $f(x)=x^3+\sin x+1$.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且对任意的实数 x，有

$$f(-x)=\begin{cases}1+x, & -x\leqslant 0,\\ 1-x, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0,\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}=f(x),$$

所以 $f(x)$为偶函数.

(2) 考虑到函数的定义域是$(-1,1)$,对任意的 $x\in(-1,1)$,由于

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(3) 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.对任意实数的 x,有

$$f(-x)=(-x)^3+\sin(-x)+1=-x^3-\sin x+1.$$

由于

$$f(-x)\neq -f(x),\quad f(-x)\neq f(x),$$

所以该函数既不是奇函数,也不是偶函数.

注意 对于定义在同一个对称数集上的函数,我们有

(1) 一个奇函数与一个偶函数乘积是奇函数;

(2) 两个偶函数或两个奇函数乘积是偶函数;

(3) 两个奇函数的代数和是奇函数,两个偶函数的代数和是偶函数;

(4) 任何函数 $f(x)$可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和,即

$$f(x)=h(x)+k(x),$$

其中偶函数 $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,奇函数 $k(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

例 5 讨论下列函数在指定范围内的单调性:

(1) $y=\sin x$, $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $y=x^3+x$, $-\infty<x<+\infty$;

(3) $y=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

解 (1) 令$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,我们有

$$y_2-y_1=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

考虑到

$$\frac{\pi}{2}>\frac{x_2+x_1}{2}>-\frac{\pi}{2},\quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

故
$$y_2-y_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$