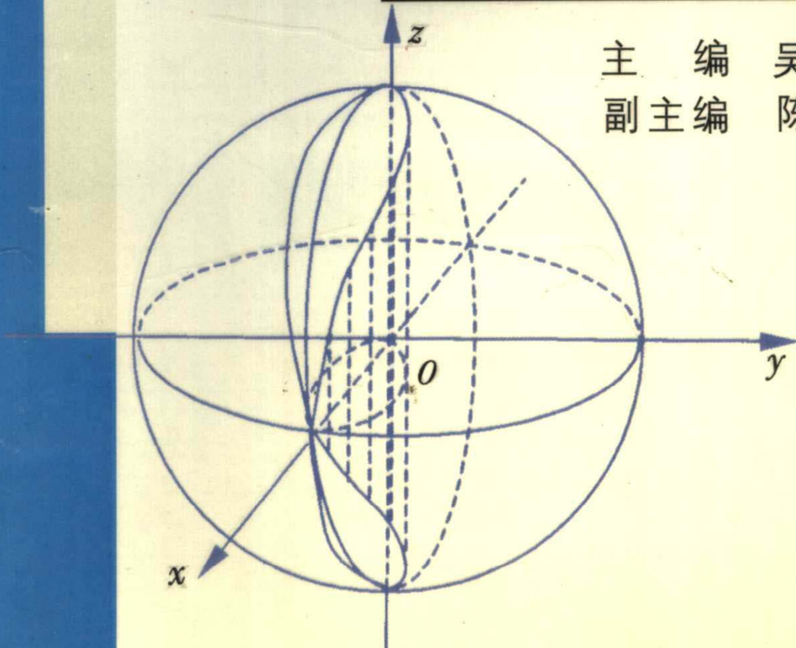
高职高专教材

YINGYONG WEIJIFEN

应用微积分

（上册）

YINGYONG WEIJIFEN



主　编　吴肇基
副主编　陈卫忠

东南大学出版社

高职高专教材

应用微积分

上册

主　编　吴肇基

副主编　陈卫忠

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书是按照国家教委“高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求”编写的。内容包括极限与连续、一元与多元微积分、级数、微分方程、向量代数与空间解析几何，分上、下册出版。本书的一个特色是把传统的教学内容与利用数学符号计算软件解题结合起来，并加入若干与微积分有关的数学建模内容。这样，既能加深对微积分基本知识的理解，避免许多繁杂的计算过程，又能依靠数学软件的强大功能拓宽微积分学的应用范围。

本书是高职高专院校各类专业高等数学课程的基础教材，同时也可作为职工大学、业余大学、远程教育学院及电视大学的高等数学基础课教材，本书可供工程及经济类各专业师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分/吴肇基主编.—南京:东南大学出版社，2001.9

ISBN 7-81050-826-1

Ⅰ.应... Ⅱ.吴... Ⅲ.微积分-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 062347 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 ,邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 南京化工大学印刷厂印刷

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:9.25 字数:243 千字

2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷

印数:1-5000 册 全套定价:29.80 元(上、下册)

(凡因印装质量问题，可直接向发行科调换，电话:025-3792327)

前　言

进入21世纪，高职高专院校的高等数学教学面临着如何使教材适应科学技术的迅猛发展、社会对人才素质要求的不断提高以及高等教育逐渐大众化的新问题。

现在全国各高校纷纷推出自己的新教材。我们根据自己长期的教学实践，展望新世纪对数学教学的要求，本着百花齐放的愿望，编写了这本教材。

在新的教学要求尚未出台的情况下，本教材仍按照原国家教委制定的《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》编写，努力贯彻"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则；讲清概念，减少论证，使学生掌握基本的概念、理论和计算技能，初步具备应用微积分方法解决实际问题的能力。

在本书的编写过程中，我们认为，传统的高等数学教材是经过长期教学实践形成的，已为广大师生所认可，应当加以继承；同时，我们也作了一些新的尝试，主要有以下四点：

1.加入了一些比较新颖的应用题以及若干与微积分有关的数学建模内容，目的是使传统教材带有一点时代气息。

2.考虑到学工程的学生应当懂一点经济管理方面的知识，因此，书中插入了一些简单的边际分析等经济学应用题。

3.微积分主要讨论连续变量。鉴于现在对离散变量的处理越来越重要，因而我们在讲完二阶线性微分方程之后，插入了与其形式和解法都十分相似的二阶线性差分方程。

4.《基本要求》指出要"增加实验课"环节。当初主要是对物理、化学等课程而言的，但现在随着计算机的日益普及和数学软件的日趋完善，数学也开始引进实验手段。所以我们在本书上、下册各安排了四个数学实验，介绍如何使用数学软件 Mathematica 进行微积分的符号计算(如求极限、导数、积分、解微分方程)，近似计算和绘制曲线、曲面的图形。该软件的强大功能和丰富而有趣的内容使微积分如虎添翼，大大拓宽了它的应用范围，对于培养高职高专学生的动手能力和解决实际问题的能力无疑是极为有利的。当然，考虑到各地区、各学校在硬件和软件方面的差异，我们把它们

放在书末，目前暂无条件的学校可以不讲。

本书的教学时数在130学时左右（打 * 号的内容要另加学时），数学实验为16学时（包括教师讲课及学生上机练习）。

本书由吴肇基任主编，陈卫忠任副主编，参加编写的有：吴肇基（第一章，第八章），陈卫忠（第二章，第三章），华天瑞（第四章，第五章），章合利（第六章，第七章），陈剑（实验一，实验二），陆卫丰（实验三，实验四，实验五，附录），杨晓华（实验六，实验七，实验八）。陆卫丰绘制了本书的大部分图形；杨晓华修订了全部数学实验。全书最后由主编和副主编修改定稿。

本书由浙江大学数学系王斯雷教授主审，他提出了许多宝贵的改进意见。谨在此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，书中谬误之处难免存在，请使用本书的老师、学生和读者们不吝指教。

编　者

2001年4月

目　录

1　一元函数　极限　连续

1.1　一元函数

1.1.1　一元函数的概念

函数是现代数学最重要的概念之一，也是微积分学的主要研究对象。大家在中学里已经学过一元函数，现重新叙述如下：

定义　设 D 为一非空实数集合，如果存在某种对应法则 f，使对任何实数 $x \in D$，都有惟一的实数 y 与它对应，则称 f 确定了一个一元函数 $f: D \to f(D)$，通常记为 $y = f(x)$，称 x 为自变量，y 为因变量，D 为定义域，$f(D)$ 为值域。

如果我们取定自变量的一个值 x_0，则对应的函数值为 $f(x_0)$。

函数的对应法则也可用其他字母表示，例如 $g(x)$，$y(x)$，$F(x)$，$\varphi(x)$ 等等。

函数的定义域有两种确定方式，现举例说明如下。一元函数 $f(x) = \sqrt{x-1}$ 的定义域 $D = [1, \infty)$，值域 $f(D) = [0, \infty)$。这里的定义域由使表达式有意义的一切实数组成，称为自然定义域。在实际问题中，函数的定义域应根据它的实际意义确定。例如圆半径 r 与圆周长 C 之间的函数关系 $C = 2\pi r$，定义域应当是 $D = (0, \infty)$。

我们所定义的函数是"单值函数"，与自变量 x 对应的是惟一的因变量 y。现在来考虑抛物线方程 $y^2 = 2x$。由于对任意的 $x \in D = [0, \infty)$，有两个值 $y = \pm\sqrt{2x}$ 与它对应，就不符合上述函数定义。这时我们说该方程确定了一个"多值函数"，通常把它分成

$f_1(x)=\sqrt{2x}$ 和 $f_2(x)=-\sqrt{2x}$，得到两个单值函数。当然，如果把 y 当作自变量，x 当作因变量，则仍为一个单值函数 $x=\frac{1}{2}y^2, y\in(-\infty,\infty)$。

函数有三种表示法：公式法、列表法和图像法。其中公式法用得最多，图像法则比较直观，这两种表示法常常同时使用。

在实际问题中还经常出现如下的“分段函数”：

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -2\leqslant x<0,\\ 2^x-1, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$$

应当注意这是一个函数，只是在定义域的不同范围内有不同的表达式。由于在 $x=0$ 的左右函数有不同的表达式，我们称 0 为它的一个分界点。它的图像见图 1－1. 请读者想一想，$f(x)$ 的定义域是什么？$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 各等于多少？

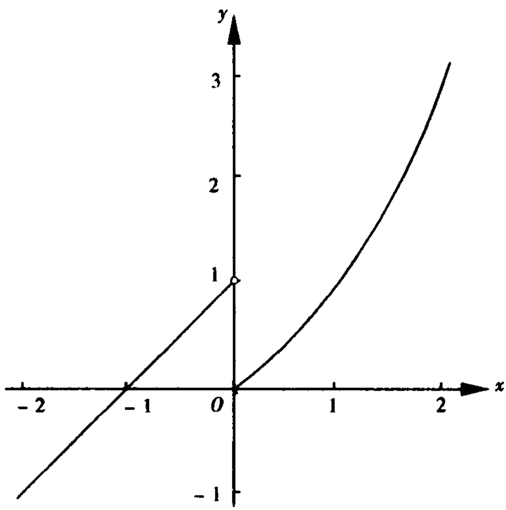


图 1－1

综上所述，一个函数有两个要素：定义域和对应法则。具有相同定义域和对应法则的两个函数被认为是相同的，不管自变量和因变量用什么字母表示。例如，$y=f(x)$ 也可写作 $y=f(u)$。将自

变量和因变量分别改用 y 和 x 表示，则上述函数也可表为 $x = f(y)$。

1.1.2 函数的一些性态

1) **有界性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 M，使对任意的 $x \in D$ 都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界。反之，如果这样的 M 不存在，也就是说不管 M 取得多么大，总存在某个 $x_0 \in D$，使得 $|f(x_0)| > M$，则称 $f(x)$ 在 D 上无界。

例如，函数 $\sin x$ 在它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ 上有界，因为对任意的 $x \in D$，都有 $|\sin x| \leqslant 1$。又如，函数 $\frac{1}{x}$ 在它的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内无界，因为不管 M 取得多么大，总存在非常靠近 0 的点 $x_0 = \frac{1}{2M} \in D$，使得 $\left|\frac{1}{x}\right| > M$。顺便说一句，微积分处理问题与中学数学有着不同的风格。例如我们也可以取 $x_0 = \frac{1}{3M}$ 来说明它的无界性，这在以后也会经常碰到。另外，应当指出的是有界性与定义域有关。如果只考虑闭区间 $[2,6]$，则函数 $\frac{1}{x}$ 是有界的，因为此时有 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$。

注：有界性也可改述为“存在两个常数 M 和 N，使对任意的 $x \in D$，都有 $M < f(x) < N$”。此时，我们把 N 称为上界，把 M 称为下界。

2) **单调性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D。若对任意的 $x_1, x_2 \in D(x_1 < x_2)$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$（或者 $f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 为单调递增的（或者单调递减的）。有的函数在其定义域内没有单调性，但在某个区间内可能是单调的。例如，函数 $\tan x$ 在开区间 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k \in Z)$ 内都是单调递增的，这种区间叫函数的单调区间。此外，若对任意的 $x_1, x_2 \in D(x_1 < x_2)$，都有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$（或者 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 为单调不减的（或者单

调不增的)。

3) **奇偶性** 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对任意的 $x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数;若有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点中心对称。常见的偶函数有 $f(x) = 1, x^2, \cos x, |x|$ 等;常见的奇函数有 $f(x) = x, \sin x$ 等。也有许多函数没有奇偶性,像 $f(x) = 2^x, \log_a x$, $\arccos x$ 等。不难验证有限个奇函数(偶函数)的和或差仍为奇函数(偶函数),两个奇函数(偶函数)的积或商是偶函数,奇函数与偶函数的积或商是奇函数等等。据此,我们立即知道,$f(x) = 1 + x^2$, $\dfrac{\sin x}{x}$, $x\sin 3x$ 都是偶函数,$f(x) = x\cos 2x, x^2\sin x, \tan x, \cot x$ 都是奇函数。

4) **周期性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在非零常数 T,使得对任意的 $x \in D$,必有 $x + T \in D$,且总有 $f(x + T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 为它的周期。显然,T 的任何非零整数倍仍为它的周期。但通常我们所指的周期是它的最小正周期。

1.1.3 初等函数与非初等函数

1) **反函数** 设有一元函数 $f: D \to f(D)$,若对任意的 $y \in f(D)$,按照对应法则 f,存在惟一的 $x \in D$ 与它对应,则称这种对应关系为反函数,记作 $f^{-1}: f(D) \to D$,或者 $x = f^{-1}(y)$,通常再按习惯写作 $y = f^{-1}(x)$,这是因为我们在 1.1.1 段末尾已经说过,改变自变量和因变量的字母不会改变函数的对应关系,而在习惯上总是用 x 和 y 分别表示自变量和因变量。在平面直角坐标系中,反函数 $x = f^{-1}(y)$ 和函数 $y = f(x)$ 的图形相同;但是如果把反函数写作 $y = f^{-1}(x)$,则它的图形与 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。

例如,$y = x^3$ 的反函数是 $x = \sqrt[3]{y}$,或按习惯写作 $y = \sqrt[3]{x}$。但是,$y = \sin x$ 的反函数比较复杂,因为对于任意的 $y \in [-1,1]$,与

它对应的 x 有无穷多个。因此，我们通常将它的定义域限制在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上。这样，对应值 x 是惟一的，于是得到反正弦函数 $y = \arcsin x$。

2) *基本初等函数* 我们把以下六类函数称为基本初等函数，这些函数在中学里已经学过。

(1) 常数函数 $y = c$（c 为某常数）。它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域只包含一个数 c。

(2) 幂函数 $y = x^{\alpha}$（α 为非零常数）。由于 α 取值不同，幂函数的定义域也随之不同，但它们有一个公共定义域 $(0,+\infty)$。图 1 - 2(a) 绘出了几个有代表性的幂函数的图像。

(3) 指数函数 $y = a^{x}$（$a > 0, a \neq 1$）。它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。今后我们经常使用以 e 为底的指数函数 $y = e^{x}$。e 是一个同圆周率 π 一样重要的常数。它的前几位小数为

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

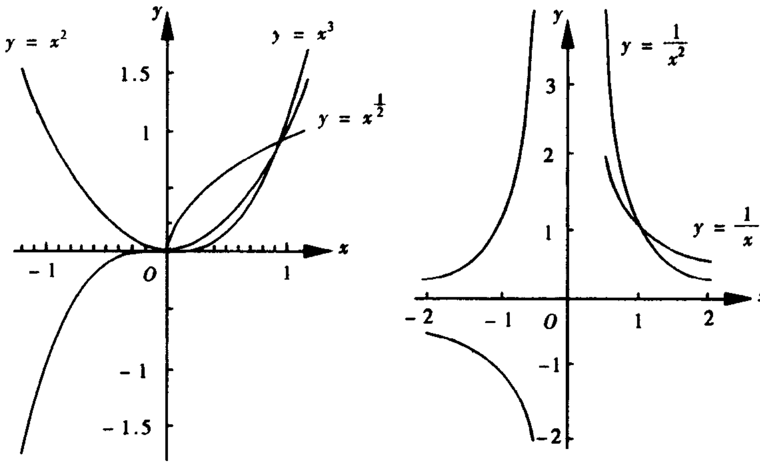
指数函数的图像见图 1 - 2(b)。

(4) 对数函数 $y = \log_{a}x$（$a > 0, a \neq 1$）。这是指数函数的反函数，定义域为 $(0,+\infty)$。特别地，以 e 为底的对数函数叫做自然对数，记为 $y = \ln x$。对数函数的图像见图 1 - 2(c)。

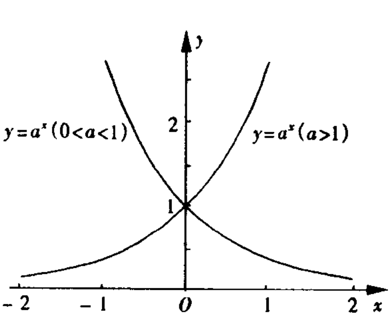
(5) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$。其中 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$\tan x$ 和 $\sec x$ 的定义域为除 $k\pi + \frac{\pi}{2}$（$k \in Z$）外的全体实数；$\cot x$ 和 $\csc x$ 的定义域为除 $k\pi$（$k \in Z$）外的全体实数。图 1-2(d) 是正弦和余弦函数的图像，图 1 - 2(e) 是正切和余切函数的图像。

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$。其中反正弦和反余弦函数的定义域均为 $[-1,1]$，值域分别为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $[0,\pi]$。反正切和反余切函数的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，值域分别为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $(0,\pi)$。图 1 - 2(f) 是反正

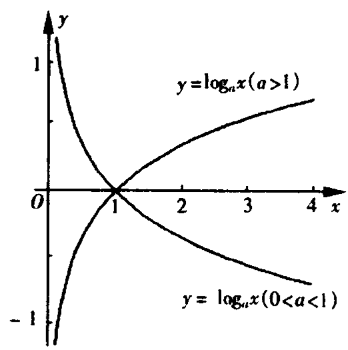
弦和反余弦函数的图像，图 1－2(g) 是反正切和反余切函数的图像。



(a)



(b)

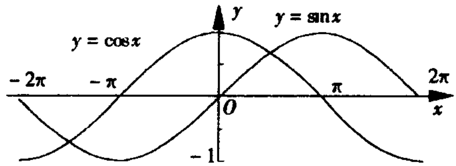


(c)

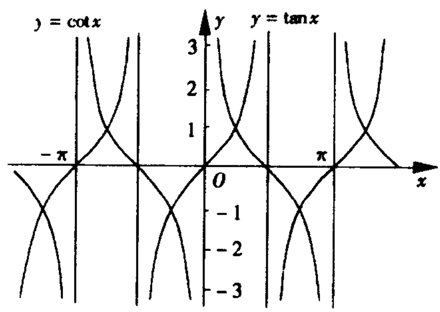
图 1－2

3） **简单函数和复合函数** 由基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数称为简单函数。例如

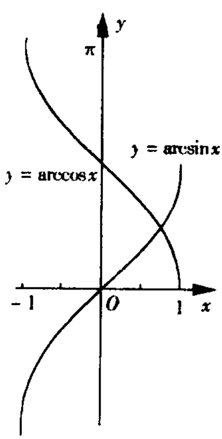
$$y = x^2 + 2x - 3, \quad y = xe^x + \cos x, \quad y = \frac{\arctan x - 1}{\sqrt{x}}.$$



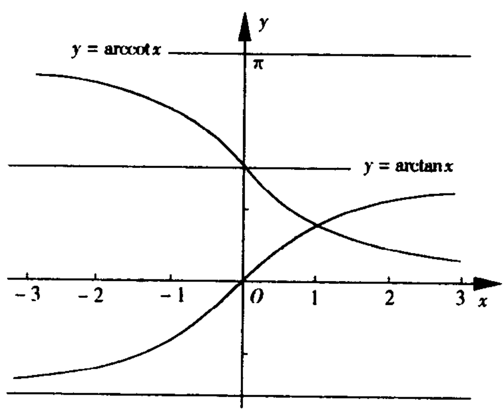
(d)



(e)



(f)



(g)

续图 1-2

现在我们来考察函数 $y=\sqrt{1-\sin x}$。这个函数可以看作是由两个函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 和 $u=g(x)=1-\sin x$ 复合而成的，其中 $u=g(x)=1-\sin x$ 的定义域 $D=(-\infty,\infty)$，值域 $g(D)=$

$[0,2]$; $y = f(u) = \sqrt{u}$ 的定义域$E = [0, \infty)$,且有 $g(D) \subset E$。

一般地,设有两个函数$f: E \to f(E)$, $g: D \to g(D)$。则对任意的 $x \in D$,由对应法则 g,存在惟一的 $u = g(x) \in g(D)$。如果 $g(D) \subset E$,则再由对应法则f,存在惟一的 $y = f(u) \in f(E)$。这种由自变量 x 经过变量u与因变量y对应的函数称为复合函数,记为 $y = f[g(x)]$, u 称为中间变量。

显然,将两个函数f 和g 复合的先决条件是$g(D) \subseteq E$。例如,要将函数 $y = \ln u$ 与$u = x - 1$ 复合成 $y = \ln(x - 1)$,它的定义域必须缩小为$(1, +\infty)$。另一个相反的例子是 $y = \arcsin u$ 与$u = x^2 + 2$ 无法复合,因为 u 的值域与y 的定义域的交集是空集。

还可以把两个以上函数复合起来。例如,由 $y = e^v$, $v = \sqrt{u}$, $u = x^2 + 1$ 三个函数复合成函数 $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$。

反过来,我们也可以把一个复合函数分解为若干个简单函数。例如,函数 $y = \ln^2(x + 1)$ 可以分解为三个简单函数 $y = v^2$, $v = \ln u$, $u = x + 1$。

4) *初等函数和非初等函数* 由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合所得到的,可用一个式子表示的函数称为初等函数。例如

$$y = \sqrt{1 + \sin^2 x},\ y = xe^{2x} - \ln x,\ y = x^2 \arctan \frac{x - 1}{x + 1}.$$

此外,在工程技术上还常用到一类初等函数,即双曲函数和反双曲函数。

(1) 双曲正弦 $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

(2) 双曲余弦 $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

(3) 双曲正切 $y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

它们的图像见图 1-3(a)、(b)。

双曲函数与三角函数有着极为类似的性质。例如,$\sinh x$ 是奇