College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计教程

（第四版）

习题全解指南

沈恒范　严钦容

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计教程(第四版)
习题全解指南

沈恒范　严钦容

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材——《概率论与数理统计教程(第四版)》的配套辅助用书,内容包括概率论与数理统计的基本内容。

与主教材相对应,全书共分九章,各章的顺序和内容与主教材保持一致,给出习题全解。部分题目在解答之后对该类题目的解法进行了总结和归纳,部分题目提供了多种解法。此外,还收集了1987—2004年全国高等学校硕士研究生入学统一考试数学试题中有关概率论与数理统计部分的试题,并做出详细解答。

本书内容切合学生实际、针对性强,通过解题过程,帮助学生掌握概率统计的基本知识、基本理论和基本技能,可供高等学校工科和其他非数学类专业学生选用,对准备考研的学生也是一本很好的参考书,还可供使用主教材的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程(第4版)习题全解指南/沈恒范,严钦容.—北京:高等教育出版社,2004.11
ISBN 7-04-015479-X

Ⅰ.概... Ⅱ.①沈...②严... Ⅲ.①概率论-高等学校-解题②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.021-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第091689号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 朱 静
版式设计 张 岚 **责任校对** 康晓燕 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	涿州市京南印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004年11月第1版
印　　张	21.75	印　　次	2004年11月第1次印刷
字　　数	400 000	定　　价	22.90元

物料号:15479-00

序　言

本书是为学习《概率论与数理统计教程(第四版)》(以下简称《教程(第四版)》)的读者编写的辅助教材。全书共分九章,各章的顺序和内容与《教程(第四版)》保持一致。各章的内容都分为两个部分(第八章、第九章仅有习题解答):

(一)习题解答

对于初学本课程的读者,计算有关概率论部分的习题(尤其是求随机事件的概率的习题)往往感到比较困难,而计算有关数理统计部分的习题又感到比较繁琐,往往会出现计算误差。本书把《教程(第四版)》中各章后面的全部习题都做出了详细解答,有些习题还给出了多种解法,供读者参阅,相信读者将会从中获得启发和帮助。

(二)历届硕士研究生入学试题解答

本书收集了自1987年至2004年全国高等学校硕士研究生入学统一考试数学试题中有关概率论与数理统计部分的试题,并做出了详细解答,有些试题还给出了多种解法。如果试题的内容仅涉及某一章的内容,则该试题就安排在这一章中;如果试题的内容涉及某两章(或两章以上)的内容,则该试题就安排在后一章中。每一章中的试题分为三个部分:填空题、选择题、解答题,各部分的试题则按年份的先后顺序编排。为了与《教程(第四版)》中所用的数学名词、符号及文字叙述等统一起见,在保持试题原意完全不变的基础上,我们对若干试题中的数学名词、符号及文字叙述等作了某些修改。这些试题可以作为《教程(第四版)》习题的补充,不仅对于准备报考硕士研究生的读者有所帮助,而且对于所有学习本课程的读者复习和巩固所学内容也是有益的。

本书由沈恒范主编,各章的习题解答由沈恒范编写,历届硕士研究生入学试题解答由严钦容编写。

本书编写过程中,曾经得到湖北汽车工业学院领导同志的关心和支持,编者谨致以衷心的谢意。

限于编者的水平,本书难免存在某些缺点和错误,诚恳希望读者批评指正。

编　者

2004年3月

郑重声明

目　录

第一章 随机事件及其概率

习题一解答

1.1 任意抛掷一颗骰子,观察出现的点数. 设事件 A 表示“出现偶数点”,事件 B 表示“出现的点数能被 3 整除”.

(1) 写出试验的样本点及样本空间;

(2) 把事件 A 及 B 分别表示为样本点的集合;

(3) 下列事件:

$$\overline{A},\overline{B},A\cup B,AB,\overline{A\cup B}$$

分别表示什么事件? 并把它们表示为样本点的集合.

解 (1) 任意抛掷一颗骰子可以看作是一次随机试验,易知共有 6 个不同的结果:“出现 1 点”,“出现 2 点”,…,“出现 6 点”. 设试验的样本点

$$\omega_i=\text{“出现 } i \text{ 点”},\quad i=1,2,3,4,5,6;$$

则样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}.$$

(2) 因为事件 A 表示“出现偶数点”,即“出现 2 点、4 点或 6 点”,所以有

$$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\};$$

又因为事件 B 表示“出现的点数能被 3 整除”,即“出现 3 点或 6 点”,所以有

$$B=\{\omega_3,\omega_6\}.$$

(3) 因为事件$\overline{A}$是 A 的对立事件,所以它表示“出现奇数点”,即“出现 1 点、3 点或 5 点”,于是有

$$\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\};$$

因为事件$\overline{B}$是B 的对立事件,所以它表示“出现的点数不能被 3 整除”,即“出现 1 点、2 点、4 点或 5 点”,于是有

$$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5\};$$

因为事件 $A\cup B$ 是事件A 与B 的并,所以它表示“出现的点数为偶数或能被 3 整除”,即“出现的点数能被 2 或 3 整除”,于是有

$$A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\};$$

因为事件 AB 是事件 A 与 B 的交，所以它表示“出现的点数为偶数，且能被 3 整除”，即“出现的点数能被 2 和 3 整除”，于是有

$$AB = \{\omega_6\};$$

因为事件$\overline{A \cup B}$是 $A \cup B$ 的对立事件，所以它表示“出现的点数不能被 2 或 3 整除”，于是有

$$\overline{A \cup B} = \{\omega_1, \omega_5\}.$$

1.2　设 A、B、C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A、B、C 表示出来：

(1) 仅 A 发生；

(2) A、B、C 都发生；

(3) A、B、C 都不发生；

(4) A、B、C 不都发生；

(5) A 不发生，且 B、C 中至少有一事件发生；

(6) A、B、C 中至少有一事件发生；

(7) A、B、C 中恰有一事件发生；

(8) A、B、C 中至少有二事件发生；

(9) A、B、C 中最多有一事件发生.

解　(1)“仅 A 发生”就是“A 发生，且 B、C 都不发生”，这是三事件 A、$\overline{B}$、$\overline{C}$的交，所以应记作 $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2)“A、B、C 都发生”就是“A 发生、B 发生、C 发生”，这是三事件 A、B、C 的交，所以应记作 ABC；

(3)“A、B、C 都不发生”就是“A 不发生、B 不发生、C 不发生”，这是三事件$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$的交，所以应记作$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4)“A、B、C 不都发生”就是“A、B、C 都发生”的对立事件，所以应记作$\overline{ABC}$；

(5)“A 不发生，且 B、C 中至少有一事件发生”就是事件$\overline{A}$与事件$B \cup C$ 的交，所以应记作$\overline{A}(B \cup C)$；

(6)“A、B、C 中至少有一事件发生”就是三事件 A、B、C 的并，所以应记作$A \cup B \cup C$；

(7)“A、B、C 中恰有一事件发生”就是“仅 A 发生、仅 B 发生或仅 C 发生”，这是三个互不相容事件 $A\overline{B}\,\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}\,\overline{B}C$ 的并，所以应记作

$$A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C;$$

(8)“A、B、C 中至少有二事件发生”就是“AB、AC、BC 中至少有一事件发生”，也就是 AB、AC、BC 的并，所以应记作

$$AB \cup AC \cup BC;$$

(9)“A、B、C 中最多有一事件发生”就是“A、B、C 中至少有二事件发生”的对立事件,所以应记作

$$\overline{AB \cup AC \cup BC};$$

又这个事件也就是“A、B、C 中至少有二事件不发生”,即为三事件$\overline{A}\ \overline{B}$、$\overline{A}\ \overline{C}$、$\overline{B}\ \overline{C}$的并,所以也可以记作

$$\overline{A}\ \overline{B} \cup \overline{A}\ \overline{C} \cup \overline{B}\ \overline{C}.$$

1.3 袋中有 10 个球,分别写有号码 1～10,其中 1,2,3,4,5 号球为红球;6,7,8 号球为白球;9,10 号球为黑球. 设试验为:

(1) 从袋中任取一个球,观察其颜色;

(2) 从袋中任取一个球,观察其号码.

分别写出试验的基本事件及样本空间,并指出样本空间中的基本事件是否是等可能的.

解 (1) 从袋中任取一个球,如果试验是为了观察取出的球的颜色,则因为袋中有 3 种不同颜色的球,所以试验的基本事件共有 3 个,它们是:

$$\omega_{红} = \text{“取出红球”},\ \omega_{白} = \text{“取出白球”},\ \omega_{黑} = \text{“取出黑球”};$$

于是有样本空间

$$\Omega_1 = \{\omega_{红}, \omega_{白}, \omega_{黑}\}.$$

因为袋中红球、白球、黑球的个数不相等,所以上述 3 个基本事件不是等可能的.

(2) 从袋中任取一个球,如果试验是为了观察取出的球的号码,则因为袋中有 10 个不同号码的球,所以试验的基本事件共有 10 个,它们是:

$$\omega_i = \text{“取出 } i \text{ 号球”} \quad (i = 1, 2, \cdots, 10);$$

于是有样本空间

$$\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}.$$

因为袋中 1,2,…,10 号的球各有一个,所以上述 10 个基本事件是等可能的.

1.4 电话号码由 7 个数字组成,每个数字可以是 0,1,2,…,9 中的任一个数字(但第一个数字不能为 0),求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率.

解 由 7 个数字组成的电话号码中,第一个数字不能为 0,排列数为 P_9^1;其余 6 个数字都可以是 0,1,2,…,9 中的任一个数字,排列数为 10^6;总的排列数就是 $\mathrm{P}_9^1 \cdot 10^6$. 所以,基本事件的总数

$$N = \mathrm{P}_9^1 \cdot 10^6.$$

设事件 A 表示电话号码由完全不相同的数字组成,则第一个数字的排列数仍为 P_9^1,而其余 6 个数字的排列数为 P_9^6,这时的排列数就是 $\mathrm{P}_9^1 \cdot \mathrm{P}_9^6$. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M = \mathrm{P}_9^1 \cdot \mathrm{P}_9^6.$$

于是,按公式(1.22)①得所求概率

$$P(A)=\frac{P_9^1\cdot P_9^6}{P_9^1\cdot 10^6}=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}{10^6}\approx 0.060\ 5.$$

1.5 把 10 本书任意地放在书架上,求其中指定的 3 本书放在一起的概率.

解 把 10 本书任意地放在书架上,共有 $P_{10}^{10}=10!$ 种不同的排列法. 所以,基本事件的总数 $N=10!$.

设事件 A 表示 10 本书中指定的 3 本书放在一起,则可以把这 3 本书作为 1 个整体与其它 7 本书任意摆放,应有 $P_8^8=8!$ 种不同的排列法;放在一起的这 3 本书又有 $P_3^3=3!$ 种不同的排列法;从而共有 $8!\times 3!$ 种不同的排列法. 所以,事件 A 包含的基本事件数 $M=8!\times 3!$.

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}\approx 0.066\ 7.$$

1.6 为了减少比赛场次,把 20 个球队任意分成两组(每组 10 队)进行比赛,求最强的两队被分在不同组内的概率.

解 从 20 个球队中任意选取 10 个队分在第一组内(其余 10 个队分在第二组内),共有 C_{20}^{10} 种不同的分法. 所以,基本事件的总数 $N=C_{20}^{10}$.

设事件 A 表示最强的两队被分在不同组内,则可以先从这 2 个最强的队中任意选取 1 个队分入第一组(另 1 个队分入第二组),有 C_2^1 种不同的分法;再从其余 18 个队中任意选取 9 个队分入第一组(另 9 个队分入第二组),有 C_{18}^9 种不同的分法;从而共有 $C_2^1\cdot C_{18}^9$ 种不同的分法. 所以,事件 A 包含的基本事件数 $M=C_2^1\cdot C_{18}^9$.

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_{18}^9}{C_{20}^{10}}=\frac{10}{19}\approx 0.526\ 3.$$

1.7 在桥牌比赛中,把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家(每家 13 张牌),求北家的 13 张牌中:

(1) 恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花的概率;

(2) 恰有大牌 A、K、Q、J 各 1 张,其余为小牌的概率.

解法一 一副桥牌共有 52 张牌,按花色区分,有黑桃、红心、方块、草花各 13 张牌;按大小区分,有大牌 A、K、Q、J 与小牌 10、9、…、3、2 各 4 张牌. 把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家(每家 13 张牌),如果考虑发牌的顺序,则 52 张牌的全排列共有 52! 种不同的排列法. 所以,基本事件的总数

---

① 这里及以后的公式编号都是《概率论与数理统计教程(第四版)》中的公式编号.

$$N=52!.$$

当第 1 张牌发给东家时,则北家得到的是第 4、第 8、…、第 52 张牌.

(1) 设事件 A 表示北家的 13 张牌中恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花,则不妨设想先从 13 张黑桃中任选 5 张、从 13 张红心中任选 4 张、从 13 张方块中任选 3 张、从 13 张草花中任选 1 张,再把选出的这 13 张牌在上述 13 个位置进行全排列,有

$$C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot 13!$$

种不同的排列法;同时,还应考虑分发给其他三家的 39 张牌在其余 39 个位置上的全排列,有 39! 种不同的排列法;从而共有

$$C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot 13! \cdot 39!$$

种不同的排列法. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M_1=C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot 13! \cdot 39!.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(A)=\frac{C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot 13! \cdot 39!}{52!}\approx 0.005\ 39.$$

(2) 设事件 B 表示北家的 13 张牌中恰有大牌 A、K、Q、J 各 1 张,其余为小牌,则不妨设想先从 4 张 A、4 张 K、4 张 Q、4 张 J 中分别任选 1 张,从 36 张小牌中任选 9 张,再把选出的这 13 张牌在上述 13 个位置进行全排列,有

$$(C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13!$$

种不同的排列法;同时,还应考虑分发给其他三家的 39 张牌在其余 39 个位置上的全排列,有 39! 种不同的排列法;从而共有

$$(C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13! \cdot 39!$$

种不同的排列法. 所以,事件 B 包含的基本事件数

$$M_2=(C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13! \cdot 39!.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(B)=\frac{(C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13! \cdot 39!}{52!}\approx 0.037\ 95.$$

解法二 如果不考虑发牌的顺序,则把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家(每家 13 张牌),共有

$$C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}$$

种不同的分法. 所以,基本事件的总数

$$N=C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}.$$

(1) 设事件 A 表示北家的 13 张牌中恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花,则不妨设想先从 13 张黑桃中任选 5 张、从 13 张红心中任选 4 张、从 13 张方块中任选 3 张、从 13 张草花中任选 1 张(共 13 张牌)分给北家,有

$$C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}$$

种不同的分法；再把其余 39 张牌分给东、南、西三家(每家 13 张牌)，有

$$C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$$

种不同的分法；从而共有

$$C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$$

种不同的分法. 所以，事件 A 包含的基本事件数

$$M_1=C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}.$$

于是，按公式(1.22)得所求概率

$$P(A)=\frac{C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}}{C_{52}^{13}}\approx 0.005\ 39.$$

(2) 设事件 B 表示北家的 13 张牌中恰有大牌 A、K、Q、J 各 1 张，其余为小牌，则不妨设想先从 4 张 A、4 张 K、4 张 Q、4 张 J 中分别任选 1 张，从 36 张小牌中任选 9 张(共 13 张牌)分给北家，有

$$(C_4^1)^4C_{36}^{9}$$

种不同的分法；再把其余 39 张牌分给东、南、西三家(每家 13 张牌)，有

$$C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$$

种不同的分法；从而共有

$$(C_4^1)^4C_{36}^{9}\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$$

种不同的分法. 所以，事件 B 包含的基本事件数

$$M_2=(C_4^1)^4C_{36}^{9}\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}.$$

于是，按公式(1.22)得所求概率

$$P(B)=\frac{(C_4^1)^4C_{36}^{9}\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{(C_4^1)^4C_{36}^{9}}{C_{52}^{13}}\approx 0.037\ 95.$$

解法三　注意到解法二的(1)及(2)的计算过程中都是先把分母与分子的公约数 $C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$ 约去，再进行计算，所以我们只需考虑从 52 张牌中任取 13 张分发给北家的情况，而不必再考虑其余 39 张牌分发给其他三家的情况.

从 52 张牌中任取 13 张分发给北家，共有 C_{52}^{13} 种不同的分法. 所以，基本事件的总数

$$N=C_{52}^{13}.$$

(1) 设事件 A 表示北家的 13 张牌中恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1

张草花,则有

$$C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}$$

种不同的分法. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M_1=C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(A)=\frac{C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}}{C_{52}^{13}}\approx 0.005\ 39.$$

(2) 设事件 B 表示北家的 13 张牌中恰有大牌 A、K、Q、J 各 1 张,其余为小牌,则有

$$(C_4^1)^4C_{36}^{9}$$

种不同的分法. 所以,事件 B 包含的基本事件数

$$M_2=(C_4^1)^4C_{36}^{9}.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(B)=\frac{(C_4^1)^4C_{36}^{9}}{C_{52}^{3}}\approx 0.037\ 95.$$

1.8 将 3 个球随机地投入 4 个盒子中,求下列事件的概率:

(1) A——任意 3 个盒子中各有 1 个球;

(2) B——任意 1 个盒子中有 3 个球;

(3) C——任意 1 个盒子中有 2 个球,其它任意 1 个盒子中有 1 个球.

解 将每一个球随机地投入 4 个盒子中,各有 4 种不同的投法;将 3 个球随机地投入 4 个盒子中,则共有 4^3 种不同的投法. 所以,基本事件的总数

$$N=4^3=64.$$

(1) 我们可以用两种方法计算事件 A 包含的基本事件数:

(i) 先从 4 个盒子中任意选定 3 个盒子,有 C_4^3 种不同的选法;再将 3 个球分别投入这 3 个盒子中,有 P_3^3 种不同的投法;从而共有 $C_4^3\cdot P_3^3$ 种不同的投法. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M_1=C_4^3\cdot P_3^3=24.$$

(ii) 第一个球可以投入 4 个盒子中的任 1 个盒子,有 4 种不同的投法;第二个球只能投入其余 3 个盒子中的任 1 个盒子,有 3 种不同的投法;第三个球只能投入其余 2 个盒子中的任 1 个盒子,有 2 种不同的投法;从而共有 $4\times3\times2$ 种不同的投法. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M_1=4\times3\times2=24.$$

于是,按公式(1.22)得事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{24}{64}=0.375.$$

(2) 我们也可以用两种方法计算事件 B 包含的基本事件数：

(i) 先从 4 个盒子中任意选定 1 个盒子，有 C_4^1 种不同的选法；再将 3 个球都投入这个盒子中，有 1^3 种投法；从而共有 $C_4^1\times 1^3$ 种不同的投法. 所以，事件 B 包含的基本事件数

$$M_2=C_4^1\times 1^3=4.$$

(ii) 第一个球可以投入 4 个盒子中的任 1 个盒子中，有 4 种不同的投法；第二、第三个球只能都投入这个盒子中，有 1^2 种投法；从而共有 4×1^2 种不同的投法. 所以，事件 B 包含的基本事件数

$$M_2=4\times 1^2=4.$$

于是，按公式(1.22)得事件 B 的概率

$$P(B)=\frac{4}{64}=0.062\ 5.$$

(3) 我们也可以用两种方法计算事件 C 包含的基本事件数：

(i) 先从 4 个盒子中任选 1 个盒子，从 3 个球中任选 2 个球，再将这 2 个球都投入选定的这个盒子中，有 $C_4^1C_3^2\times 1^2$ 种不同的投法；将最后 1 个球随机地投入其余 3 个盒子中的任 1 个盒子中，有 3 种不同的投法；从而共有 $C_4^1C_3^2\times 1^2\times 3$ 种不同的投法. 所以，事件 C 包含的基本事件数

$$M_3=C_4^1C_3^2\times 1^2\times 3=36.$$

(ii) 第一个球可以投入 4 个盒子中的任 1 个盒子中，有 4 种不同的投法；第二个球可以与第一个球投入同 1 个盒子中，也可以投入其余 3 个盒子中的任 1 个盒子中，如果是前一种情况，则第三个球应投入其余 3 个盒子中的任 1 个盒子中，有 1×3 种不同的投法；如果是后一种情况，则第三个球应投入已有球的 2 个盒子中的任 1 个盒子中，有 3×2 种不同的投法；从而共有

$$4(1\times 3+3\times 2)$$

种不同的投法. 所以，事件 C 包含的基本事件数

$$M_3=4(1\times 3+3\times 2)=36.$$

于是，按公式(1.22)得事件 C 的概率

$$P(C)=\frac{36}{64}=0.562\ 5.$$

1.9　同时掷四个均匀的骰子，求下列事件的概率：

(1) A——四个骰子的点数各不相同；

(2) B——恰有两个骰子的点数相同；

(3) C——四个骰子的点数两两相同，但两对的点数不同；

(4) D——恰有三个骰子的点数相同；

(5) E——四个骰子的点数都相同.

解 掷一个骰子,出现的点数有 6 种不同的情形;同时掷四个骰子,出现的点数共有 6^4 种不同的情形. 所以,基本事件的总数

$$N=6^4=1\ 296.$$

(1) 四个骰子的点数各不相同,有 $6\times5\times4\times3$ 种不同的情形. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M_1=6\times5\times4\times3=360.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(A)=\frac{360}{1\ 296}\approx0.277\ 8.$$

(2) 为了使恰有两个骰子的点数相同,不妨从四个骰子中任选两个骰子配成一对,有 C_4^2 种不同的选法;这对骰子的点数相同,但与其余两个骰子的点数各不相同,有 $6\times5\times4$ 种不同的情形;从而共有 $C_4^2\times6\times5\times4$ 种不同的情形. 所以,事件 B 包含的基本事件数

$$M_2=C_4^2\times6\times5\times4=720.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(B)=\frac{720}{1\ 296}\approx0.555\ 6.$$

(3) 为了使四个骰子的点数两两相同,不妨把四个骰子任意选配成两对,有 $\frac{1}{2}C_4^2C_2^2$ 种不同的选法;每一对骰子的点数相同,但两对的点数不同,有 6×5 种不同的情形;从而共有 $\frac{1}{2}C_4^2C_2^2\times6\times5$ 种不同的情形. 所以,事件 C 包含的基本事件数

$$M_3=\frac{1}{2}C_4^2C_2^2\times6\times5=90.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(C)=\frac{90}{1\ 296}\approx0.069\ 4.$$

(4) 为了使恰有三个骰子的点数相同,不妨从四个骰子中任选三个骰子组成一组,有 C_4^3 种不同的选法;这组骰子的点数相同,但与其余一个骰子的点数不同,有 6×5 种不同的情形;从而共有 $C_4^3\times6\times5$ 种不同的情形. 所以,事件 D 包含的基本事件数

$$M_4=C_4^3\times6\times5=120.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(D)=\frac{120}{1\ 296}\approx0.092\ 6.$$

(5) 因为四个骰子的点数都相同,只有 6 种不同的情形,所以事件 E 包含的基本事件数

$$M_5=6.$$

于是,按公式(1.22)得所求概率

$$P(E)=\frac{6}{1\ 296}\approx 0.004\ 6.$$

*$\mathbf{1.10}$ 在半径为 R 的圆内画平行弦. 如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的,求任意画的弦的长度大于 R 的概率.

解 如图 1.1,设垂直于直径 AB 的弦 CD 与直径 AB 的交点的横坐标为 x,则所有基本事件可以用区间 $(-R,R)$ 内的点表示出来,按题意它们是等可能的.

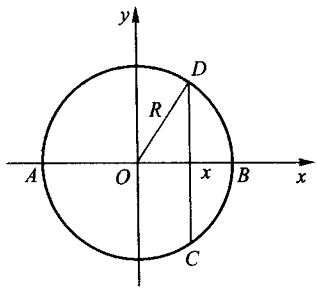

图 1.1

设事件 E 表示弦 CD 的长度大于 R,则 E 包含的基本事件可以用那些横坐标 x 满足下面不等式的点表示出来:

$$|CD|=2\sqrt{R^2-x^2}>R,$$

即

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}R<x<\frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

于是,按公式(1.24),所求概率就等于区间 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R,\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$ 的长度 l 与区间 $(-R,R)$ 的长度 L 之比,即

$$P(E)=\frac{l}{L}=\frac{\sqrt{3}R}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866.$$

*$\mathbf{1.11}$ 把长度为 a 的棒任意折成三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

解 设长度为 a 的棒被折成三段后,其中两段的长度分别为 x 及 y,则第三

段的长度为 $a-x-y$. 我们有

$$0<x<a,\quad 0<y<a,\quad 0<a-x-y<a;$$

即

$$0<x<a,\quad 0<y<a,\quad 0<x+y<a.$$

把(x,y)看作平面上一点的直角坐标,则所有的基本事件可以用图 1.2 中大三角形区域内的点表示出来.

设事件 A 表示被折成的三段可以构成一个三角形,则因为三角形的任意两边之和大于第三边,所以应有

$$y+(a-x-y)>x,\quad x+(a-x-y)>y,\quad x+y>a-x-y;$$

即

$$x<\frac{a}{2},\quad y<\frac{a}{2},\quad x+y>\frac{a}{2}.$$

因此,事件 A 包含的基本事件可以用图 1.2 中阴影部分内的点表示出来.

于是,按公式(1.24),所求概率就等于图 1.2 中阴影部分的面积 s 与大三角形的面积 S 之比,即

$$P(A)=\frac{s}{S}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}=0.25.$$

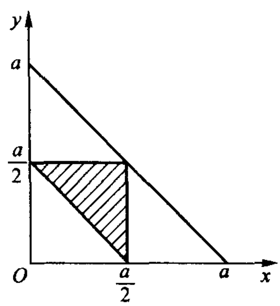

图 1.2

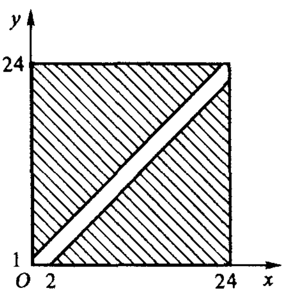

图 1.3

***1.12** 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊,它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时,乙船的停泊时间是两小时,求它们中的任何一艘都不需等候码头空出的概率.

解 设甲乙两艘轮船到达码头的时刻分别是 x 及 y,则按题意有

$$0\leqslant x\leqslant 24,\quad 0\leqslant y\leqslant 24.$$

把(x,y)看作平面上一点的直角坐标,则所有基本事件可以用图 1.3 中边长为 24 的正方形区域内的点表示出来.