

洪尹 伟雷 孙连友 许锋 等著

电磁场边值问题的 区域分解算法

2



科学出版社

www.sciencep.com



华夏英才基金学术文库

电磁场边值问题的 区域分解算法

洪 伟 孙连友 等著
尹 雷 许 锋

科 学 出 版 社
北 京 |

内 容 简 介

本书是作者及其课题组在电磁场区域分解算法方面十多年研究工作的成果总结。主要内容包括 Laplace 方程的区域分解-有限差分解法、Helmholtz 方程的区域分解-频域有限差分解法、Maxwell 方程的区域分解-频域有限差分解法、Maxwell 方程的区域分解-时域有限差分法、多枝区域的投影分解算法和维数缩减技术等,以及这些算法在超大规模集成电路互连结构参数提取、电大复杂二维电磁散射计算、复杂三维微波结构的全波参数提取、城区电波传播特性预测、三维天线和散射分析问题中的应用。

本书可作为电磁场与微波技术专业的研究生教材,也可供从事计算电磁学研究的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场边值问题的区域分解算法/洪伟等著. —北京:科学出版社, 2005

(华夏英才基金学术文库)

ISBN 7-03-015383-9

I. 电… II. 洪… III. 电磁场-边值问题-区域(数学)-计算方法
IV. O441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 052254 号

责任编辑:巴建芬 于宏丽/责任校对:李奕莹

责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2005年8月第一次印刷 印张:17 3/4

印数:1—2 000 字数:347 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

20 世纪 90 年代中期,随着集成电路的飞速发展,超大规模集成电路(VLSI)中互连结构电磁参数的提取变得越来越重要。从那时起,本课题组开始与美国加州大学圣克鲁斯分校等合作开展 VLSI 互连结构电磁参数(电容、电感和电阻)提取方面的研究。开始主要是基于不变性测试方程(MEI)法,之后根据 VLSI 结构分层的特点提出了维数缩减技术(DRT),其中已用到了区域分解的思想。但在 DRT 中,由于各子域之间通过分界面上边界条件的匹配进行连接,使得建立数学模型的工作量大而且繁琐。进一步的工作通过采用数学上的区域分解法原理,如 Schwarz 交替迭代法、D-N 交替法等,将子域间的模式匹配转换为迭代过程中的数据交换。这样,一方面使得各子域上问题的求解具有更大的独立性,另一方面也进一步提高了计算效率。在 VLSI 互连结构参数提取方面获得成功应用之后,又将区域分解法应用于动态电磁场问题的分析,如二维和三维电磁散射问题、多层印刷天线的辐射问题、多层微波无源电路的网络参数提取问题等,并发展了区域分解-时域有限差分法(DD-FDTD)和多枝区域的投影分解算法等。

在开展电磁场边值问题区域分解算法的研究过程中,先后有九位博士研究生和三位硕士研究生不同程度地参与了这一课题的研究,并在国内外学术期刊上发表了一系列论文。本书实际上是我们就这一课题研究成果的总结,因此除了封面上署名的四位作者之外,主要贡献者或作者还应包括:殷晓星博士、朱震海博士、汪杰博士、宋犇博士、季皓硕士、陈宇硕士、安翔博士、张华博士和吕志青硕士等。

在开展电磁场边值问题区域分解算法这一课题的研究过程中,先后得到教育部跨世纪优秀人才基金、国家杰出青年基金、海外青年合作研究基金等的资助,本书的出版又得到华夏英才基金的资助,作者在此一并致谢。

限于作者水平,书中可能会存在许多错误或不妥之处,恳请读者批评指正。

作 者

2005 年 3 月

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 电磁场基本方程	1
一、Maxwell 方程组	1
二、边界条件	5
三、位函数	6
第二节 区域分解法	11
一、Laplace 方程	12
二、Helmholtz 方程	15
三、Maxwell 方程	17
第三节 内容安排	18
参考文献	19
第二章 Laplace 方程的区域分解-有限差分解法	21
第一节 重叠型区域分解法	21
一、Schwarz 交替法	21
二、多层多导体互连结构	23
第二节 非重叠型区域分解法	44
一、D-N 交替法	44
二、多区域 D-N 交替法与多层互连结构	45
第三节 混合迭代格式	50
一、混合迭代格式	50
二、应用算例	51
本章小结	52
参考文献	52
第三章 Helmholtz 方程的区域分解-频域有限差分解法	54
第一节 共形网格下的有限差分方程	55
一、问题描述与网格离散	55
二、内节点上的有限差分方程	56
三、导体表面节点上的有限差分方程	58
四、截断边界上的方程	60

第二节 柱体电磁散射问题的区域分解算法	65
一、区域分解与问题描述	65
二、区域分解算法的矩阵描述	69
三、应用算例	72
第三节 多柱体散射问题的区域分解算法	78
一、问题描述与迭代过程	79
二、多柱体间散射场的快速多极子加速算法	80
三、城区电波传播特性预测	86
四、区域分解法应用于电磁兼容问题	90
第四节 矩阵分解算法	96
一、矩阵分解法	96
二、基于差分方程的矩阵分解法	98
第五节 基于部分基础解向量的区域分解算法	101
一、PBSV-DDM 的基本原理	101
二、数值算例	103
三、基于基函数展开的 PBSV-DDM 算法	106
本章小结	108
参考文献	109
第四章 Maxwell 方程的区域分解-频域有限差分解法	114
第一节 三维电磁问题的频域有限差分法	115
一、归一化的 Maxwell 方程组	115
二、内节点上的频域有限差分方程	116
三、介质交界面上的差分方程	117
四、吸收边界条件	117
五、入射场的引入	120
第二节 Yee 网格下区域分解算法的实现	120
一、区域分解与虚拟边界条件	121
二、区域分解迭代算法的矩阵描述	123
三、各向异性媒质	126
四、数值算例	129
五、区域分解迭代算法的加速	141
第三节 渐进波形估计-区域分解法	150
一、Padé 逼近	151
二、Padé 逼近加速的区域分解-频域有限差分法	152
三、数值算例	157

本章小结	162
参考文献	163
第五章 区域分解-时域有限差分法	166
第一节 时域有限差分法	167
一、Yee 网格下的时域有限差分方程	167
二、边界的处理	170
三、激励脉冲函数	173
四、时域有限差分方程的求解	175
第二节 重叠型区域分解-时域有限差分法	177
一、区域分解与网格划分	178
二、二维插值公式及其修正	180
三、三维插值公式及其修正	187
第三节 非重叠型区域分解-时域有限差分法	200
一、二维非重叠型区域分解-时域有限差分法	200
二、三维非重叠型区域分解-时域有限差分法	208
第四节 自适应区域分解-时域有限差分法	211
一、二维自适应区域分解-时域有限差分法	213
二、三维自适应区域分解-时域有限差分法	215
本章小结	220
参考文献	220
第六章 多枝区域的投影分解算法	224
第一节 多枝区域上 Helmholtz 方程的投影分解算法	224
一、差分方程	224
二、投影分解法	226
三、投影分解法的几何解释	228
四、投影分解法的收敛性分析	229
五、周期开槽波导传播特性的分析	231
第二节 多空间投影分解算法	233
一、算法描述	233
二、多空间投影分解法的几何投影描述	237
三、多空间投影分解法的收敛性分析	239
第三节 投影分解算法的收敛特性	240
一、线性空间之间的距离	241
二、算法收敛速度与线性子空间之间距离的关系	242
三、关关节点数与线性子空间距离的关系	244

四、数值算例	246
第四节 快速投影分解算法	247
一、算法描述	247
二、快速投影分解法的几何解释	249
三、快速投影分解法收敛性分析及收敛速度比较	250
四、快速投影分解法的最优参数	252
五、数值算例	252
第五节 多参数多空间快速投影分解算法	253
一、算法描述	253
二、参数优化	254
三、数值算例	255
本章小结	256
参考文献	257
第七章 维数缩减技术	258
第一节 基本原理	258
第二节 一些典型多层结构的处理	262
一、多层介质中的多导体交叉结构	263
二、多层介质中的多导体拐角结构	266
三、多层介质中的通孔结构	268
第三节 数值算例	271
本章小结	273
参考文献	273

第一章 绪 论

在数学领域,区域分解法的提出最早可追溯到 19 世纪 70 年代,但到目前为止这种方法仍然是数学领域中备受重视的一个研究分支。在电磁场与微波技术领域,人们很早就基于直觉的物理概念应用了区域分解的思想将复杂问题化为若干简单问题求解,但基于数学上的区域分解法求解电磁场问题还是近十多年的事。本章将简要介绍描述电磁场问题的基本方程和针对这些方程的区域分解算法,并将概括介绍本书的内容安排。

第一节 电磁场基本方程

虽然假定本书的读者已具有电磁场理论方面的背景知识,但为了阅读方便,本节仍将罗列一些最基本的电磁场理论基础知识,包括描述电磁场问题的基本方程、本构关系、边界条件、位函数和 Green 函数等。若在阅读后面章节时碰到超出本节的电磁场方面的内容,请读者参看有关参考文献[1~10]。

一、Maxwell 方程组

1864 年 Maxwell 在总结了静态场的高斯定理、恒定电流场的安培环路定律和交变场的法拉第电磁感应定律的基础上提出了反应电磁场时空变化规律的 Maxwell 方程组,从而奠定了经典电磁理论的基础。

描述空间任一点上场与源之间时空变化关系的微分形式 Maxwell 方程组为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{J}_m(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \rho_m(\vec{r}, t) \\ \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\vec{H}$: 磁场强度,单位为安/米(A/m);

$\vec{E}$: 电场强度,单位为伏/米(V/m);

$\vec{B}$: 磁感应强度(磁通密度),单位为韦/米²(Wb/m²);

$\vec{D}$: 电位移矢量(电通密度),单位为库/米²(C/m²);

$\vec{J}$: 电流密度, 单位为安/米² (A/m²);

$\vec{J}_m$: 磁流密度(等效);

ρ : 电荷密度, 单位为库/米³ (C/m³);

ρ_m : 磁荷密度(等效);

$\vec{r}, t$: 空间位置矢量和时间变量。

应当指出, 到现在为止在自然界中还没有发现客观存在的磁流和磁荷, 但引入等效磁流和等效磁荷一方面使 Maxwell 方程组看起来具有对称性, 另一方面在有些情况下可简化问题的分析。

在源之间存在如下连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad (1.2b)$$

事实上, 对 Maxwell 方程组中前两个方程两边作散度运算, 然后代入后两个方程即可获得电流连续性方程(1.2a)和磁流连续性方程(1.2b), 也就是说这两个方程是 Maxwell 方程组的导出方程而非独立的方程。

在实际中最常用的是正弦信号或时谐信号, 这种信号随时间的变化可用时谐因子 $e^{j\omega t}$ 来描述, 这里 ω 为角频率。实际上, 对于非正弦信号, 我们仍然可以将之用 Fourier 级数或 Fourier 积分展开成不同频率时谐信号的叠加。对于时谐信号, 所有的场量和源量关于时间的变化都可用时谐因子 $e^{j\omega t}$ 来描述, 如 $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}$, 这时 Maxwell 方程组(1.1)退化为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega \vec{D}(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{J}_m(\vec{r}) - j\omega \vec{B}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \rho_m(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \end{cases} \quad (1.3)$$

其中关于时间的导数已用 $j\omega$ 代替, 而且略去了公共因子 $e^{j\omega t}$ 。

当 $\omega \rightarrow 0$, 也就是场不随时间变化时, 上面 Maxwell 方程组又退化为两组独立的分别描述静电场和静磁场的方程

$$\text{静电场} \begin{cases} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r}) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{静磁场} \begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

静电场和静磁场统称为静场或静态场, 在静态场中电场与磁场之间没有耦合。

如果将 Maxwell 方程组近似后既能反映出静电场的主要特征 $\nabla \times \vec{E} = 0$,

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, 又能保持电场与磁场之间的耦合就得到准静电场方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega \vec{D}(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

在准静电场中电流连续性方程 $\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega\rho$ 和欧姆定律 $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ 仍然成立, 这里 σ 是有耗介质的电导率, 单位为 S/m(西门子/米)。

类似地, 如果将 Maxwell 方程组近似后既能反映出静磁场的主要特征 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 又能保持电场与磁场之间的耦合就得到准静磁场方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

准静电场和准静磁场统称为准静场或准静态场。

当所考虑的物理问题的定义域与工作波长相比很小时, 采用准静态场方程进行求解可以获得满意的结果。

考虑到电流连续性方程(1.2a)和磁流连续性方程(1.2b), Maxwell 方程组中只有前两个方程是独立的。如果将各场量和源量都写成分量形式, 则这前两个方程可分解为 6 个标量方程, 而场量 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 却有 12 个分量, 也就是说未知量个数大于方程个数。因此, 这些场量之间还应存在其他的联系。人们把反映介质电磁特性的 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 之间以及电流密度 $\vec{J}$ 与这些场量之间的关系称作本构关系, 其一般表达式如下

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) \quad (1.8a)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}) \quad (1.8b)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E}, \vec{H}) \quad (1.8c)$$

对于非线性介质, $\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 是 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的非线性函数; 而对于一般的线性、非均匀、时变、双各向异性(bi-anisotropic)介质, 上述关系又可写成下面的形式

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \bar{\epsilon}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \bar{\xi}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1.9a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \bar{\eta}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \bar{\mu}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1.9b)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \bar{\sigma}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.9c)$$

其中顶标“ $\cdot$ ”表示并矢(张量), 式(1.9c)就是广义的欧姆定律。下面将给出一些常用介质的本构关系。

(1) 自由空间

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.10)$$

其中 $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) \text{ F/m}$ (法/米) 和 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ (亨/米) 分别为自由空间的介电常数(电容率)和磁导率。

(2) 理想介质

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.11)$$

其中 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$; ϵ_r 和 μ_r 分别称作相对介电常数和相对磁导率。

(3) 简单有耗介质

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \\ \vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.12)$$

(4) 电各向异性介质(旋电介质)

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \bar{\epsilon} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \end{cases}, \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

特别地,当

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -j\epsilon_2 & 0 \\ j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

时所描述的是等离子体(plasma)。这里, ϵ_1, ϵ_3 都是复数。

(5) 磁各向异性介质(旋磁介质)

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \bar{\mu} \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \end{cases}, \quad \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

特别地,当

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}, \quad \text{或} \quad \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & j\kappa \\ 0 & -j\kappa & \mu \end{bmatrix}, \quad \text{或} \quad \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & j\kappa \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -j\kappa & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

时所描述的是铁氧体(ferrite)。上述三个表达式分别对应 z, x 和 y 向偏置磁场。

(6) 手征介质(chiral medium)

关于手征介质的本构关系没有一个统一的定义,但散见于文献中的各种定义都是等价的,这里我们仅给出一种最常见的定义

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_c \vec{E}(\vec{r}, t) - j\mu\xi_c \vec{H}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = j\mu\xi_c \vec{E}(\vec{r}, t) + \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \end{cases}, \quad \epsilon_c = \epsilon + \mu\xi_c^2 \quad (1.15)$$

其中 ϵ, μ 的意义同前, ξ_c 称作介质的手征导纳。

在自然界中手征介质很少见,但我们可以采用在一般介质中掺入金属小螺旋等方法实现人工手征介质。

(7) 左手材料(left-handed material)

早在 1968 年,苏联学者 Veselago 就从理论上论述了当 ϵ 和 μ 同时为负时的一些奇异现象^[11]。这一想法在之后的近 30 年里没有引起人们的重视。直到 1996 年, Pendry 等指出用周期金属杆阵构成的人造材料可以产生负 ϵ 现象^[12], 之后又指出用开口环形谐振器(split ring resonator, SRR)周期阵构成的人造材料可以产生负 μ 现象^[13]。随后, Smith 和 Shelby 等首次实验证实了 ϵ 和 μ 同时为负的现象^[14]。最近,左手材料已成为国内外电磁领域甚至物理界的一个研究热点。左手材料也有人称之为异向介质^[15](metamaterial)。

二、边界条件

实际中所面临的绝大部分电磁场问题都不是定义在无限自由空间内的简单问题,而是定义在复杂区域和复杂介质上的电磁场边值问题、初值问题或初边值问题。这时,我们就需要知道电磁场量在各种边界,如理想/非理想导体表面、理想磁导体表面、两种介质分界面等上所满足的边界条件。

无论是静态场或动态场,在理想导体表面上切向电场和法向磁感应强度总是等于零,而切向磁场等于表面电流密度,即

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \\ \hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.16)$$

在理想磁导体表面上,有

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0 \\ \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{J}_m(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.17)$$

其中 $\hat{n}$ 表示表面法向单位矢量。理想导体表面亦称作电壁,而理想磁导体表面亦

称作磁壁。

对于静电场,在理想导体表面上的法向电位移等于表面电荷密度,即

$$\hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = D_n = \rho_s(\vec{r}) \quad (1.18)$$

在两种介质的分界面上,切向电磁场和法向电磁场分别满足如下连续性条件

$$\begin{cases} \hat{n} \times [\vec{H}_1(\vec{r}, t) - \vec{H}_2(\vec{r}, t)] = \vec{J}(\vec{r}, t) \\ \hat{n} \times [\vec{E}_1(\vec{r}, t) - \vec{E}_2(\vec{r}, t)] = -\vec{J}_m(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot [\vec{D}_1(\vec{r}, t) - \vec{D}_2(\vec{r}, t)] = \rho_s(\vec{r}, t) \\ \hat{n} \cdot [\vec{B}_1(\vec{r}, t) - \vec{B}_2(\vec{r}, t)] = \rho_{sm}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.20)$$

其中 $\hat{n}$ 表示分界面上从介质 2 指向介质 1 的法向单位矢量, $\vec{J}$ 和 $\vec{J}_m$ 分别为分界面上的传导面电流密度和面磁流密度,而 ρ_s 和 ρ_{sm} 分别为分界面上的面电荷密度和面磁荷密度。

以上边界条件都是直接由 Maxwell 方程组导出的,因而是最基本的边界条件。对于具体问题的具体边界条件都可由以上边界条件导出。

三、位 函 数

即使考虑了本构关系和电磁流的连续性方程,直接求解 Maxwell 方程组仍然是一个关于 6 个标量函数($\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的 6 个分量)的一阶耦合偏微分方程组的求解问题。那么,是否有什么办法可以减少未知量和方程的个数,从而简化问题的求解? 为此,人们引入了位函数。具有代表性的位函数有矢量电位、矢量磁位、标量电位、标量磁位、Hertz 电矢量位和磁矢量位等。下面我们将从统一的观点出发引入一般的位函数,上述各种位函数都可看成是其特例。

对于线性介质,Maxwell 方程组是线性偏微分方程组,因此其解满足线性叠加原理。为简明起见,假设介质为服从本构关系(1.11)的理想介质。如果我们将激励源分成 $\{\vec{J}(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t)\}$ 和 $\{\vec{J}_m(\vec{r}, t), \rho_m(\vec{r}, t)\}$ 两组,并将它们所产生的场量分别用上角标“e”和“h”表示,则可将 Maxwell 方程组拆分成下面两组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}^e(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon \frac{\partial \vec{E}^e(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E}^e(\vec{r}, t) = -\mu \frac{\partial \vec{H}^e(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E}^e(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{H}^e(\vec{r}, t) = 0 \end{cases} \quad (1.21a)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}^h(\vec{r}, t) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^h(\vec{r}, t) \\ \nabla \times \vec{E}^h(\vec{r}, t) = -\vec{J}_m(\vec{r}, t) - \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}^h(\vec{r}, t) \\ \nabla \cdot \vec{E}^h(\vec{r}, t) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H}^h(\vec{r}, t) = \frac{\rho_m(\vec{r}, t)}{\mu} \end{cases} \quad (1.21b)$$

由线性叠加原理知, 所有的源产生的总场等于上述两组 Maxwell 方程组解的叠加, 即, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^e(\vec{r}, t) + \vec{E}^h(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}^e(\vec{r}, t) + \vec{H}^h(\vec{r}, t)$ 。

令

$$\begin{cases} \vec{H}^e(\vec{r}, t) = \xi^e \nabla \times \vec{F}^e(\vec{r}, t) \\ \vec{E}^h(\vec{r}, t) = -\xi^h \nabla \times \vec{F}^h(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.22)$$

其中 ξ^e, ξ^h 为常数, $\vec{F}^e(\vec{r}, t), \vec{F}^h(\vec{r}, t)$ 为矢量位函数。将之分别代入式(1.21a)和式(1.21b), 并考虑到电流连续性方程(1.2a)、磁流连续性方程(1.2b), 得

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{F}^e(\vec{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{F}^e(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{J}(\vec{r}, t)}{\xi^e} \\ \nabla^2 \phi^e(\vec{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^e(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon} \\ \vec{H}^e(\vec{r}, t) = \xi^e \nabla \times \vec{F}^e(\vec{r}, t) \\ \vec{E}^e(\vec{r}, t) = -\nabla \phi^e(\vec{r}, t) - \mu\xi^e \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}^e(\vec{r}, t) \\ \nabla \cdot \vec{F}^e(\vec{r}, t) = -\frac{\epsilon}{\xi^e} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \phi^e(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.23a)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{F}^h(\vec{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{F}^h(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{J}_m(\vec{r}, t)}{\xi^h} \\ \nabla^2 \phi^h(\vec{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^h(\vec{r}, t) = -\frac{\rho_m(\vec{r}, t)}{\mu} \\ \vec{E}^h(\vec{r}, t) = -\xi^h \nabla \times \vec{F}^h(\vec{r}, t) \\ \vec{H}^h(\vec{r}, t) = -\nabla \phi^h(\vec{r}, t) - \epsilon\xi^h \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}^h(\vec{r}, t) \\ \nabla \cdot \vec{F}^h(\vec{r}, t) = -\frac{\mu}{\xi^h} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \phi^h(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1.23b)$$

上面每组方程中的前两式分别为矢量位函数和标量位函数 ϕ^e, ϕ^h 所满足的非齐次波动方程, 也称作达朗贝尔方程。中间两式为电磁场量与位函数之间的关系式, 最后一式就是所谓的洛伦兹规范, 该规范是在导出位函数所满足的波动方程时

自然引入的,它们同时也保证了上述方程的完备性。在上面两组方程的导出过程中,我们用到了恒等式 $\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla \nabla \cdot \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$,这里 $\vec{F}$ 为任意二阶可微矢量函数。

由线性叠加原理知,总场量等于

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}^e(\vec{r}, t) + \vec{E}^h(\vec{r}, t) \\ &= -\xi^h \nabla \times \vec{F}^h(\vec{r}, t) - \nabla \phi^e(\vec{r}, t) - \mu \xi^e \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}^e(\vec{r}, t) \\ &= -\xi^h \nabla \times \vec{F}^h(\vec{r}, t) + \frac{\xi^e}{\epsilon} \nabla \nabla \cdot \int \vec{F}^e(\vec{r}, t) dt - \mu \xi^e \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}^e(\vec{r}, t) \quad (1.24a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}^e(\vec{r}, t) + \vec{H}^h(\vec{r}, t) \\ &= \xi^e \nabla \times \vec{F}^e(\vec{r}, t) - \nabla \phi^h(\vec{r}, t) - \epsilon \xi^h \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}^h(\vec{r}, t) \\ &= \xi^e \nabla \times \vec{F}^e(\vec{r}, t) + \frac{\xi^h}{\mu} \nabla \nabla \cdot \int \vec{F}^h(\vec{r}, t) dt - \epsilon \xi^h \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}^h(\vec{r}, t) \quad (1.24b)\end{aligned}$$

用 $j\omega$ 和 $1/(j\omega)$ 分别代替关于时间的微分算子 $\partial/\partial t$ 和积分算子 $\int dt$,即可得频域中的场量表达式

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}^e(\vec{r}) + \vec{E}^h(\vec{r}) = -\xi^h \nabla \times \vec{F}^h(\vec{r}) - \nabla \phi^e(\vec{r}) - j\omega\mu\xi^e \vec{F}^e(\vec{r}) \\ &= -\xi^h \nabla \times \vec{F}^h(\vec{r}) + \frac{\xi^e}{j\omega\epsilon} \nabla \nabla \cdot \vec{F}^e(\vec{r}) - j\omega\mu\xi^e \vec{F}^e(\vec{r}) \quad (1.25a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}^e(\vec{r}) + \vec{H}^h(\vec{r}) = \xi^e \nabla \times \vec{F}^e(\vec{r}) - \nabla \phi^h(\vec{r}) - j\omega\epsilon\xi^h \vec{F}^h(\vec{r}) \\ &= \xi^e \nabla \times \vec{F}^e(\vec{r}) + \frac{\xi^h}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \vec{F}^h(\vec{r}) - j\omega\epsilon\xi^h \vec{F}^h(\vec{r}) \quad (1.25b)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{F}^e(\vec{r}) + k^2 \vec{F}^e(\vec{r}) = -\frac{\vec{J}(\vec{r})}{\xi^e} \\ \nabla^2 \phi^e(\vec{r}) + k^2 \phi^e(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon} \\ \vec{H}^e(\vec{r}) = \xi^e \nabla \times \vec{F}^e(\vec{r}) \\ \vec{E}^e(\vec{r}) = -\nabla \phi^e(\vec{r}) - j\omega\mu\xi^e \vec{F}^e(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{F}^e(\vec{r}) = -j\omega\epsilon \frac{\phi^e(\vec{r})}{\xi^e} \end{cases} \quad (1.26a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{F}^h(\vec{r}) + k^2 \vec{F}^h(\vec{r}) = -\frac{\vec{J}_m(\vec{r})}{\xi^h} \\ \nabla^2 \phi^h(\vec{r}) + k^2 \phi^h(\vec{r}) = -\frac{\rho_m(\vec{r})}{\mu} \\ \vec{E}^h(\vec{r}) = -\xi^h \nabla \times \vec{F}^h(\vec{r}) \\ \vec{H}^h(\vec{r}) = -\nabla \phi^h(\vec{r}) - j\omega \xi^h \vec{F}^h(\vec{r}, t) \\ \nabla \cdot \vec{F}^e(\vec{r}) = -j\omega \mu \frac{\phi^h(\vec{r})}{\xi^h} \end{array} \right. \quad (1.26b)$$

其中 $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ 称作波数, λ 为波长。上述两组方程中的前两式称作非齐次的 Helmholtz 方程, 在无源区退化为齐次 Helmholtz 方程。

若令 $\xi^e = j\omega\epsilon$, $\xi^h = j\omega\mu$, 则 $\vec{F}^e$ 和 $\vec{F}^h$ 就分别表示 Hertz 电矢量位函数 $\vec{U}^e$ 和磁矢量位函数 $\vec{U}^h$, 而 ϕ^e 和 ϕ^h 分别为 Hertz 电标量位函数和磁标量位函数; 若令, $\xi^e = \xi^h = 1$, 则 $\vec{F}^e$ 和 $\vec{F}^h$ 就分别表示矢量磁位 $\vec{A}$ 和矢量电位 $\vec{A}^*$, 而 ϕ^e 和 ϕ^h 分别为标量磁位函数 ϕ 和标量电位函数 ϕ^* 。 ξ^e 、 ξ^h 的取值具有一定的任意性, 也就是说在实际解决问题时到底采用哪种位函数具有一定的任意性。事实上, 在解决一个具体问题时只要 ξ^e 、 ξ^h 的取值自始至终保持不变, 就可以获得正确的解。

在充满理想介质的无界空间中, 矢量位和标量位函数的解可以表示为如下非常简明的形式

$$\vec{F}^e(\vec{r}, t) = \frac{1}{\xi^e} \iiint_{\Omega'} \frac{\vec{J}(t - v^{-1} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.27a)$$

$$\vec{F}^h(\vec{r}, t) = \frac{1}{\xi^h} \iiint_{\Omega'} \frac{\vec{J}_m(t - v^{-1} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.27b)$$

$$\phi^e(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{\Omega'} \frac{\rho(t - v^{-1} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.27c)$$

$$\phi^h(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \iiint_{\Omega'} \frac{\rho_m(t - v^{-1} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.27d)$$

其中 $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 是理想介质中的波速, 特别地, 在自由空间中 $v = c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 就是光速。

从上述表达式可以看到, 在场点 $\vec{r}$ 处 t 时刻的位函数值并不取决于该时刻源域 Ω' 内的源量值, 而是取决于在此之前 $t' = (t - v^{-1} |\vec{r} - \vec{r}'|)$ 时刻的源量值。换言之, 源量在时刻 t 的作用, 要经过一个推迟时间才能到达场点 $\vec{r}$, 这段推迟时间就是波从源点 $\vec{r}'$ 以速度 v 传播到场点 $\vec{r}$ 所需要的时间。因此, 上述表达式描述的位函数也称作推迟位。

将上述位函数的积分表达式代入式(1.24), 就可得到各种源量同时存在时总