中学数学教学参考丛书

一元二次方程

上海教育出版社

一 元 二 次 方 程

赵宪初 编

上 海 教 育 出 版 社

内 容 提 要

一元一次方程和一元二次方程是最简单的整式方程，是解其他各类方程的基础．本书主要是在实数范围内讨论一元二次方程包括一元二次方程及其解法、求根公式、根和系数的关系及其应用等，并在这基础上介绍可化成一元二次方程来解的某些方程．为此，首先介绍了一些有关方程的基础理论知识，并在讨论一元二次方程之前先简单地介绍了一元一次方程．

本书可供初中数学教师教学上参考，也可供中学生课外阅读之用．

一元二次方程

赵宪初 编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印十二厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 2.75　字数 58,000

1980 年 5 月第 1 版　1980 年 5 月第 1 次印刷

印数 100,000 本

统一书号：7150・2279　　定价：0.23 元

目　　录

一、方程的概念

方程是中学代数课程中的一个非常重要的内容，是不可缺少的基础知识. 这里，我们先介绍一些有关方程的基础理论知识，包括方程的定义、方程的分类、方程的同解原理等，为读者进一步学习方程提供理论根据.

这部分内容包括方程的定义，方程的分类，方程的同解性和方程的变形.

1. 方程的定义

什么是方程？

在中学数学课程中，方程的定义是：含有未知数的等式叫做方程. 从这个定义可以看出，第一，方程属于等式，是等式之一；第二，方程和别的等式的区别，在于它含有未知数. 在逻辑学上，方程和等式这两个概念之间的这样的关系叫做从属关系，等式是种概念，方程是属概念. 方程除具有一般等式的属性以外，还有它的特有的本质属性，就是含有未知数. 方程的这个本质属性就是它和其他等式的差异，这种差异叫做属差.

因此，要掌握方程的概念，就先要明确什么是等式. 等式是用一个等号连结的两个解析式①，这就是说，只要在形式上

① 所谓解析式，是指由一系列运算符号把数字和用字母表示的数连结起来的表达式，它指明按照怎样的顺序进行运算，才能求得它的值. 单独一个数字或者字母表示的数也可以看成是一个解析式.

是两个解析式被等号连结起来,就是等式. 例如

$$2^2+1=5, \tag{1}$$

$$2+4=5, \tag{2}$$

$$(a+1)^2=a^2+2a+1, \tag{3}$$

$$2b+1=2(b+1), \tag{4}$$

$$5-2x=1 \tag{5}$$

等等都是等式.

因为每一个等式都是用数学符号来表达某种数量关系的一句语言,是一个判断,它们都有明确的含义,例如等式"$2^2+1=5$"就表示"2 的平方加上 1 等于 5",数学判断在逻辑里也叫做命题. 所以任何一个等式都是一个命题. 命题不都是真的,它有真有假. 所以等式中有成立的,也有不成立的;或者说,等式有真有假. 如果一个等式只含有数字,那末这个等式是否成立,或者说它是真是假,就非常明显,例如等式(1)是成立的,是真等式;等式(2)是不成立的,是假等式,但一个等式如果含有字母,这个等式成立与否就不是那么明显了,这时,要根据字母表示的值来决定. 例如等式(3),当字母 a 在允许值的范围内取任意数值时,它总是成立的,我们说,等式(3)是真等式;这样的等式叫做恒等式. 又如等式(4),当字母 b 在允许值的范围内取任意数值时,它总是不成立的,我们说,等式(4)是假等式;这样的等式叫做矛盾式. 再如等式(5),只有当字母 x 取实数 2 的时候,它才成立,这样的等式叫做条件等式.

等式不都是方程,只有含有未知数的等式才是方程. 因此,要判断一个等式是不是方程,就要看它是否含有字母,而且所含的字母是不是表示未知数. 例如,等式(3)、(4)、(5)都含有字母,如果把这些字母都看做是未知数,那末它们就都是

方程.

这样,方程就包括恒等式、矛盾式和条件等式. 如果一个方程是恒等式,那末这样的方程就叫做恒等方程;如果一个方程是矛盾式,那末这样的方程就叫做矛盾方程, 简单地说, 它们都是方程.

方程是含有未知数的等式, 但因为未知数的值还没有确定, 所以, 一个方程能不能真正成为等式也还没有确定. 因此,方程是一个有待研究的等式. 这里所要研究的是: 是否存在一个数,用它替代方程里的未知数时,能够使这个方程真正成为等式? 如果存在的话,把它求出来.

我们把能够使方程左右两边的值相等的未知数的值叫做方程的解. 只含有一个未知数的方程的解,也叫做方程的根. 例如方程 $5-2x=1$, 当 $x=2$ 时, 它的左右两边的值相等, 所以 2 就是这个方程的解,也就是它的根.

又如方程 $3x+5+6x-7=9x-2$, 当 x 取任何数值时,它的左右两边的值都相等,我们就说,这个方程有无穷多个解或无穷多个根. 一般地说,所有恒等方程都有无穷多个解;或者说,恒等方程的解集①是一个无限集.

再如方程 $|x|=-1$, 当 x 不论取什么数值时,它的左右两边的值都不相等,我们就说,这个方程没有解. 所有矛盾方程都没有解,或者说,矛盾方程的解集是一个空集.

上面我们研究了中学数学课程中关于方程的定义. 明确一点说,方程也可以这样来定义: 形如

$$F_1(x, y, \cdots, z)=F_2(x, y, \cdots, z) \tag{F}$$

的等式叫做方程, 其中 $F_1(x, y, \cdots, z)$ 和 $F_2(x, y, \cdots, z)$ 是

① 一个方程的解的全体所组成的集合, 叫做这个方程的解的集合, 简称解集.

在它们定义域的公共部分里所共同研究的两个函数.

这里所说的函数 F_1 和 F_2 的定义域的公共部分，就是指所有使这两个函数都有意义的变数值所组成的一个集，我们把这个集叫做方程 (F) 的自变数的允许值的集.

在这本小册子里，我们只研究含有一个未知数的方程. 方程里的未知数，我们把它叫做元. 只含有一个未知数的方程叫做一元方程，它的一般形式是

$$f(x)=g(x).$$

因此，下面我们所讨论的都是指形如 $f(x)=g(x)$ 这样的方程.

方程的上述定义是用函数给出的. 其实，每一个含有变数字母（自变数）的解析式 $f(x, y, \cdots, z)$，对于自变数 $x, y, \cdots, z$ 的每一个允许值组，它都有一个确定的数值与之对应，所以它是自变数 $x, y, \cdots, z$ 的函数. 由此可知，每一个解析式确定变数字母的某一个函数. 因此，方程的这个定义同前面所说的定义在本质上是一致的，而只是提法上不同而已.

2. 方 程 的 分 类

在中学数学课程中所研究的方程可以按照两边解析式中运算的性质分为：

(i) 在方程 $f(x)=g(x)$ 中，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都只含有代数运算，也就是它们都是代数式①，那末就叫做代数方程. 例如，方程

① 用有限的代数运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式. 单独一个数或表示数的字母也叫做代数式.

$$x+3=3x-7, \tag{1}$$

$$\frac{x+3}{x^2}=\frac{6}{x-2}, \tag{2}$$

$$\sqrt{x+3}=5 \tag{3}$$

等都是代数方程.

在代数方程 $f(x)=g(x)$ 中，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是有理式（只含有加、减、乘、除、乘方运算的代数式），那末这样的方程就叫做有理方程. 例如，方程(1)、(2)都是有理方程. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中，至少有一个是未知数 x 的无理式（含有对变数字母求开方运算的代数式），那末这样的方程就叫做无理方程. 例如，方程(3)是无理方程.

但必须注意，方程 $\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{3}\,x=5$ 不是无理方程，而是有理方程. 因为这个方程里没有对变数字母 x 求开方运算的代数式，而 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都只是无理数，它们分别是二次项和一次项的系数.

在有理方程中，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是整式（分母中不含有变数字母的代数式），就叫做整式方程. 例如，方程(1)是整式方程. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中，至少有一个是分式（分母中含有变数字母的代数式），就叫做分式方程. 例如，方程(2)是分式方程. 而方程 $x+\frac{1}{y}=0$，如果 x 表示变数，而 y 不表示变数，那末它是整式方程；如果 y 表示变数，而 x 不表示变数，那末它是分式方程；如果 x 和 y 都表示变数，那末显然它也是分式方程了.

但也必须注意，方程 $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}=0$ 不是分式方程，而是整式方程. 因为这个方程里的代数式分母不含有变数字母，而 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 都只是分数，它们分别是一次项的系数和常数

项(或零次项的系数).

整式方程可以按照未知数的最高次数分成一次方程、二次方程、三次方程等等.

在一元方程里,三次或三次以上的方程都叫做高次方程.

[注] (1) 要知道一个整式方程是几次方程,必须先把这个方程化简并加以整理后,再看方程里未知数的最高次数是几,就说这个方程是几次方程. 例如方程 $(x+3)^2-(x+2)^2=7$,把它化简整理后得到方程 $x-1=0$,所以说,这个方程是一次方程.

(2) 方程的次数只是就整式方程说的. 对分式方程和无理方程,我们不考虑它们的次数问题.

(ii) 在方程 $f(x)=g(x)$ 中,如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 含有对未知数的超越运算(指数、对数、三角函数、反三角函数等运算),那末就叫做超越方程. 例如,方程

$$2^x=5, \tag{4}$$

$$\log_{\sqrt{3}} x=2, \tag{5}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{6}$$

$$\operatorname{arc\,cos} x=\frac{\pi}{3} \tag{7}$$

等都是超越方程.

但必须注意,方程 $x\sin 30°=\sin 45°$, $x\lg 2=\lg 3$ 都不是超越方程. 因为在第一个方程里, $\sin 30°$ 和 $\sin 45°$ 都是确定的数,在第二个方程里, $\lg 2$ 和 $\lg 3$ 也都是确定的数,所以这两个方程都不是超越方程,而是代数方程.

3. 方程的同解性

两个方程,如果第一个方程的每一个解都是第二个方程

的解，并且第二个方程的每一个解也都是第一个方程的解，也就是说，它们的解完全相同，那末这样的两个方程就叫做同解，这两个方程就叫做同解方程.

换句话说，如果在某一个数集里，两个方程的解集相同，那末这两个方程就叫做在这个数集里同解，同解的两个方程叫做同解方程.

例如，方程 $5-2x=1$ 的解是 $x=2$，方程 $2x=4$ 的解也是 $x=2$，所以这两个方程同解. 而方程 $x^2-4=0$ 和方程 $x-2=0$ 就不是同解，因为前者的解是 $x_1=2$ 和 $x_2=-2$，而后者的解是 $x=2$.

很明显，矛盾方程都是同解的，因为它们的解集都是空集.

［注］ (1) 如果一个方程 $f(x)=g(x)$ 有两个或多个相同的根，那末就把这个相同的根叫做重根，例如方程 $(x-1)^2=0$ 有重根 $x=1$；方程有几个重根就叫做几度重根或几重根. 例如上面这个方程有两度重根或两重根 $x=1$.

(2) 两个整式方程是否同解要考虑到方程的重根，例如方程 $x-1=0$ 的根是 $x=1$，方程 $(x-1)^2=0$ 有两个根 $x_1=x_2=1$，而它们的解集都是 $\{1\}$①；但是，第一个方程的根是 $x=1$，而第二个方程的根是 $x_1=x_2=1$，这里 $x=1$ 是二重根，所以它们不能算作同解方程. 因此，两个整式方程只有在这样的情况下，才是同解，就是其中一个方程的每一个根，都是另一个方程的同一重度的根.

(3) 同解也叫做等价，同解方程也叫做等价方程.

这里，必须注意：(1)方程的同解概念是相对的，因为两个方程可以在某一个数集里是同解的，但在另一个数集里却不是同解的. 例如：

方程 $x(x+3)=2(x+3)$ 和 $x-2=0$，在自然数集里是同

① 集合通常用符号{ }来表示，由元素 a 组成的集合记作 $\{a\}$，由元素 1，2，3 组成的集合记作 $\{1, 2, 3\}$，等等.

解的，它们的解都是 $x=2$；但在整数集里，方程 $x(x+3)=2(x+3)$ 有两个解：$x_1=2$ 和 $x_2=-3$，所以它们就不是同解的。

方程 $2x(x+3)=x+3$ 和 $x+3=0$，在整数集里是同解的，它们的解都是 $x=-3$；但在有理数集里，方程 $2x(x+3)=x+3$ 有两个解：$x_1=-3$ 和 $x_2=\frac{1}{2}$，所以它们就不是同解的。

方程 $x^2(2x+1)=2(2x+1)$ 和 $2x+1=0$，在有理数集里它们是同解的，它们的解都是 $x=-\frac{1}{2}$；但在实数集里，方程 $x^2(2x+1)=2(2x+1)$ 有三个解：$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\sqrt{2}$ 和 $x_3=-\sqrt{2}$，所以它们就不是同解的。

方程 $3x(x^2+1)=(x^2+1)(x-6)$ 和 $3x=x-6$ 在实数集里是同解的，它们的解都是 $x=-3$；但在复数集里，方程 $3x(x^2+1)=(x^2+1)(x-6)$ 有三个解：$x_1=-3$，$x_2=i$ 和 $x_3=-i$，所以它们就不是同解的。

(2) 解方程总是在某一个指定的数集里进行的。这就是说，方程中未知数的允许值集和其中的数都是这个数集里的数。从(1)里的例子可以看到，同一个方程在不同的数集里研究，所得到的解集可能是不相同的。

4. 方程的变形

我们知道，求方程的解的过程叫做解方程。解方程就是对方程施行某种变形，把它逐步改变成比较简单的方程，直到得出形如 $x=a$ 这样最简单的方程。在每次变形中，如果所导出的新方程的解都和原方程的解相同，那末 a 就是原方程的

解；否则就会产生增根或者失掉一些根．至于怎样的变形才能使新方程的解都和原方程的解相同，怎样便会导致方程产生增根或者失掉一些根等，我们将在下面加以讨论．

(i) 方程的变形　如果把一个方程变形后得到的新方程和原方程同解，那末，这样的变形就叫做同解变形．例如，把方程 $\frac{2x-3}{3}-\frac{x+4}{2}=0$ 去分母并整理后，得出新方程 $x-18=0$，它的解是 $x=18$，而原方程的解也是 $x=18$，所以这个变形是同解变形．

但是，在解方程的时候，有时需要进行一些变形，而经过这些变形所得出的新方程和原方程可能不是同解方程．例如，在解分式方程 $\frac{1}{1-x}-\frac{3x-x^2}{1-x^2}=2$ 的时候，为了把这个方程化成整式方程，就把它的各项都乘以分母的最低公倍式 $1-x^2$，整理后就得出一个整式方程 $3x^2-2x-1=0$．在这里，第一个方程有一个解 $x=-\frac{1}{3}$，而第二个方程有两个解 $x=-\frac{1}{3}$ 和 $x=1$，其中 $x=1$ 并不是第一个方程的解，因此，变形后所得出的整式方程 $3x^2-2x-1=0$ 和原方程 $\frac{1}{1-x}-\frac{3x-x^2}{1-x^2}=2$ 不是同解方程．

两个方程，如果第一个方程的每一个解都是第二个方程的解，那末第二个方程就叫做第一个方程的结果．例如，上面这个例子中，方程 $3x^2-2x-1=0$ 就是方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{3x-x^2}{1-x^2}=2$ 的结果．

容易看到，两个方程，如果第一个方程是第二个方程的结果；并且反过来，第二个方程也是第一个方程的结果，那末这两个方程是同解方程．因为，如果第一个方程是第二个方程

的结果，那末第二个方程的所有解是第一个方程的解，同理可得，第一个方程的所有解是第二个方程的解；所以，这两个方程是同解方程.

两个方程，如果第二个方程的解集包括第一个方程的解集，但它可能还包含着不是第一个方程的解，那末这些不是第一个方程的解叫做第一个方程的客解(增根). 例如上面这个例子中，方程 $3x^2-2x-1=0$ 的解是 $x=-\frac{1}{3}$ 和 $x=1$，这里，$x=-\frac{1}{3}$ 是原分式方程的解，而 $x=1$ 不是它的解，所以 $x=1$ 是原分式方程的客解或增根. 方程的客解可以通过把求得的解代入原方程，把它检验出来.

那末，导致方程产生增根或者失掉一些根的原因何在呢？因为在把方程施行某种变形后得出一个新方程时，未知数的允许值集有可能改变：扩大或者缩小. 如果未知数的允许值集扩大了，这时就有可能引进客解(增根). 例如上面这个例子里，整式方程 $3x^2-2x-1=0$ 是把分式方程 $\frac{1}{1-x}-\frac{3x-x^2}{1-x^2}=2$ 变形后得出的新方程，这里，新方程的未知数 x 的允许值集是实数集，而原分式方程的未知数 x 的允许值集是除去 1 和 -1 外的所有实数组成的集；这就是说，新方程的未知数 x 的允许值集比原方程的扩大了(多了 1 和 -1 两个元素)，因而就引进了客解(增根) $x=1$. 而如果在方程的变形中，未知数的允许值集缩小了，这时就有可能失掉应有的解(失根或遗根). 例如，方程 $x^2-5x=0$ 的解是 $x=0$ 和 $x=5$； 但在解这个方程的时候，如果把方程的两边都除以 x，就得出方程 $\frac{x^2-5x}{x}=0$，这个新方程只有一个解 $x=5$，这样就失掉了

$x=0$ 的一个解. 容易看到，这是因为，新方程的未知数 x 的允许值集是除去零以外的所有实数组成的集，这就比原方程的未知数 x 的允许值集——实数集缩小了（少了数零一个元素）.

因此，在解方程的时候，如果遇到导出的新方程的未知数的允许值集比原方程的有所扩大，那末就要注意把所求得的根进行检验，如有增根，要把它舍去；如果遇到导出的新方程的未知数的允许值集比原方程的有所缩小，那末就要看缩小的那部分数值，是不是原方程的根，是的话，那就是失掉了的根，要把它找回来.

而如果在解方程的过程中没有改变未知数的允许值集，那末导出的新方程就和原方程同解，这时所得到的解就是原方程的解.

(ii) 关于方程变形的几个定理

定理 1 如果方程的两边都加上同一个整式，那末所得的方程和原方程是同解方程. 这就是说：方程

$$f(x)=g(x)$$

和方程 $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ [$\varphi(x)$是整式]

是同解方程.

证明 如果对于未知数 x 的某一个数值，解析式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值相等，那末对于未知数的同一个数值，解析式 $f(x)+\varphi(x)$ 和 $g(x)+\varphi(x)$ 的值也一定相等；这就是说，方程 $f(x)=g(x)$ 的每一个解都是方程 $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ 的解. 反过来，如果对于未知数的某一个数值，解析式 $f(x)+\varphi(x)$ 和 $g(x)+\varphi(x)$ 的值相等，那末对于未知数的同一个数值，解析式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值也一定相等；这就是说，方程 $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ 的每一个解都是方程 $f(x)=g(x)$ 的解.

所以方程 $f(x)=g(x)$ 和方程 $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ 是同解方程.

因为单独一个数也是代数式,而且是整式,所以上述定理包括 $\varphi(x)$ 是一个数的情况.

应用这个定理时必须注意"$\varphi(x)$ 是一个整式"这个条件,因为如果 $\varphi(x)$ 是分式,或者根式,那末变形后所得出的新方程就可能和原方程不是同解方程. 这是因为,原方程 $f(x)=g(x)$ 的解可能会使加上的那个分式或根式失去意义. 例如,在方程 $x-3=2$ 的两边加上分式 $\frac{1}{x-5}$,所得出的方程 $x-3+\frac{1}{x-5}=2+\frac{1}{x-5}$ 和原方程不是同解方程;原方程的解 $x=5$ 并不是新方程的解. 事实上,原方程的解 $x=5$ 使分式 $\frac{1}{x-5}$ 失去意义. 又如,在方程 $x-3=2$ 的两边都加上根式 $\sqrt{4-x}$,所得出的新方程 $x-3+\sqrt{4-x}=2+\sqrt{4-x}$ 和原方程就不是同解方程. 因为新方程中的根式 $\sqrt{4-x}$ 的未知数 x 的允许值必须不大于 4,所以原方程的解 $x=5$ 使新方程失去意义,它不是新方程的解.

因为从一个式子减去另一个式子与把这另一个式子的正负号改变后与减式相加一样,所以定理 1 也适用于方程两边减去同一个整式.

根据这个定理,整式方程中的任何一项都可以把它的符号改变后,从方程的一边移到另一边,这种变形叫做移项.

推论 一元方程都可以化成形如

$$F(x)=0$$

的同解方程.

定理 2 如果解析式 $h(x)$ 对于方程 $f(x)=g(x)$ 的未知

数 x 的所有允许值集都有意义，并且它的值不等于零，那末方程

$$f(x)=g(x)$$

和方程 $$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$$

是同解方程.

证明 如果对于未知数的某一个数值，解析式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值相等，那末对于未知数的同一个数值，解析式 $f(x)\cdot h(x)$ 和 $g(x)\cdot h(x)$ 的值也一定相等. 这就是说，方程 $f(x)=g(x)$ 的每一个根都是方程 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ 的根. 所以，方程 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ 是方程 $f(x)=g(x)$ 的结果. 反过来，如果对于未知数 x 的某一个数值，解析式 $f(x)\cdot h(x)$ 和 $g(x)\cdot h(x)$ 的值相等，那末对于未知数的同一个数值，解析式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值也一定相等. 这就是说，方程 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ 的每一个根都是方程 $f(x)=g(x)$ 的根. 所以方程 $f(x)=g(x)$ 是方程 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ 的结果. 因此，方程 $f(x)=g(x)$ 和 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ [$h(x)$ 对于方程 $f(x)=g(x)$ 的未知数 x 的所有允许值都有意义，并且它的值不等于零]是同解方程.

推论 方程的两边可以同乘以任何不等于零的数.

应用这个定理时必须注意“$h(x)$ 对于方程 $f(x)=g(x)$ 的未知数 x 的所有允许值都有意义，并且它的值不等于零”的条件. 如果未知数 x 取某些数值时，$h(x)$ 的值可能等于零，那末就有可能导致方程产生增根. 因为这时，方程 $f(x)=g(x)$ 的所有的解固然都是方程 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ 的解，而使 $h(x)$ 的值等于零的未知数 x 的某些数值虽是方程 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ 的解，但未必是方程 $f(x)=g(x)$ 的解. 例如，把方程