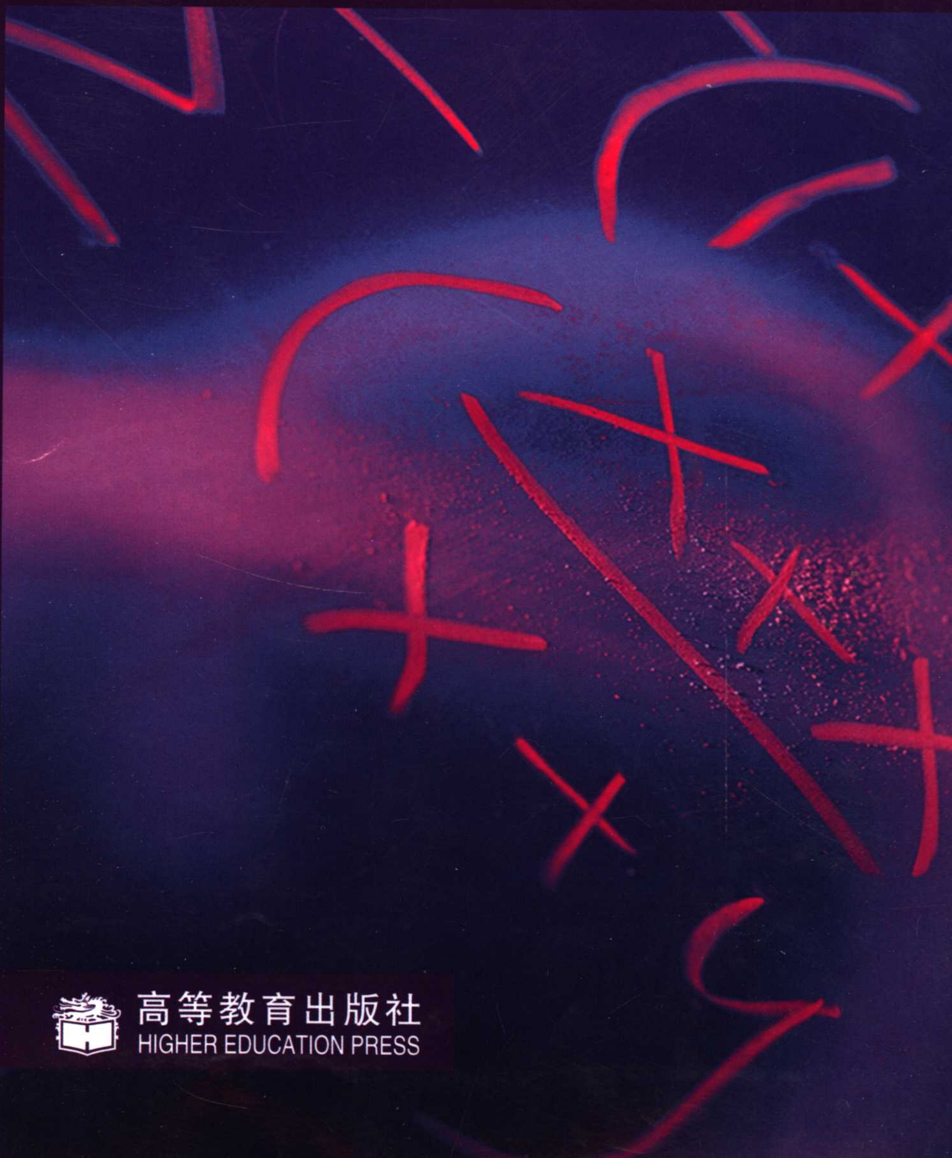
新世纪高等职业教育文化基础课程教材

（五年制、三年制高职适用）

数学（第三册）

主 编 丁百平

Mathematics



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

新世纪高等职业教育文化基础课程教材(五年制、三年制高职适用)

数 学

(第三册)

主 编 丁百平

高等教育出版社

内容提要

本书是五年制高等职业教育数学课程教材的第三册，主要内容包括：极限与连续；导数与微分；导数与微分的应用；积分；积分的应用；概率统计初步等.

本套教材是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》组织编写的，教材注重科学性、趣味性、通用性，强调“过程教学”和“问题解决”，与教材配套的练习册同时出版发行.

本书适用于五年制高等职业院校各专业，也可作为三年制高等职业院校以及部分普通高等院校少学时数学课程用教材.

图书在版编目(CIP)数据

数学，第3册/丁百平主编. —北京：高等教育出版社，2005.6

ISBN 7-04-016378-0

Ⅰ.数… Ⅱ.丁… Ⅲ.数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 062761 号

责任编辑 徐 东 **封面设计** 吴 昊 **责任印制** 潘文瑞

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899
传 真 021-56965341

购书热线 010-58581118
021-56964871
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
http://www.hepsh.com

排 版 南京理工出版信息技术有限公司
印 刷 江苏丹阳兴华印刷厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 13.25
字 数 312 000

版 次 2005年6月第1版
印 次 2005年6月第1次
定 价 17.00元

前　　言

根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称“两个文件”)的要求,为了更好地满足五年制高等职业教育数学教学的需要,通过推荐、遴选,高等教育出版社组织了学术水平较高、教学实践经验丰富的第一线数学教师,编写了这套五年制高等职业教育数学教材.为适应不同专业、不同类别的高职高专学校的需要,全套教材分三册出版.第一册内容有集合与逻辑用语、不等式、函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、向量与复数.第二册内容有立体几何、直线与二次曲线、排列与组合、二项式定理和数列.第三册内容有极限与连续、导数与微分、导数与微分的应用、积分、积分的应用、概率统计初步.本书是第三册.

本教材的编写按照“两个文件”的要求,遵循“夯实基础、强化能力、问题解决、过程教学”的原则,在教学内容、体例安排、教材结构、练习设置、课题探究等方面,力求体现高等职业教育专业面广、工种繁多的特点,选取现代生活和各类专业学习中均有广泛应用的基础知识作为必学内容,着重培养学生分析问题和解决问题的能力,强调过程教学,从而培养学生数学思维习惯与数学思维能力.为能保证学生达到高中阶段的基本数学水准和高等数学的初步教学要求,在内容的编写上注意学生的年龄特点,尽量做到由浅入深、由易到难、由具体到抽象、通俗直观、循序渐进.又为了提高学生的数学素养,每章后编有阅读材料,提供学生课外阅读,期望能拓宽视野和提高对数学的兴趣.本教材带“*”部分为选学内容.

为方便教学,与教材相配套的数学练习册同步出版发行.在教材中,练习题附在各节内容中,供课内练习使用,复习题附在每章内容之后,供复习本章知识时使用.练习册安排了作为基础内容的A组题与作为提高要求的B组题,供课外作业使用.同时,全套三册教材还配有教学参考书(共一册).

参加本教材编写的有祝小飞、余俊燕、叶鸣飞、王志勇、周雅丽、宋继环、朱天启、王开洪、蒋德喜、喻栋仁、张立喜、曾文斗、丁百平.全套教材(主教材、练习册和教学参考书)由丁百平任主编,第三册执行主编为曾文斗、副主编为宋继环、周雅丽.第三册统稿为丁百平.

本书在编写过程中,得到了教育部职业教育与成人教育司、全国职业教育教学指导委员会、中国职业技术学会教学工作委员会有关领导的热情关心和指导,在此表示衷心的感谢.

限于编者水平,不妥之处在所难免,衷心欢迎广大从事职业教育的教师、专家批评指正.

编　者

2005 年 6 月

目　　录

第 13 章　极限与连续

【在这一章】

在这一章，将学习高等数学中的基本概念极限与连续.

人们总是富于想像力. 我们说直线是向两端无限延伸的，这里的无限是什么样的一种境况？当我们研究一个函数 $y = f(x)$ 的值的时候，如果 x 是一个确定的数 x_0，那么，容易知道 y 有唯一一个确定的值 $f(x_0)$. 可是当 x 的值无限增大时，y 的值是什么呢？可以用一种什么方法去探求它呢？另外，当 x 的值无限接近于确定的数 x_0 而又不等于 x_0 时，我们又怎么来确定 y 的值呢？宇宙是广阔无垠的，事物又是无限可分的，在学习了这一章后，可以掌握一种认识世界、改造世界的极其有用的思想和方法——极限和连续.

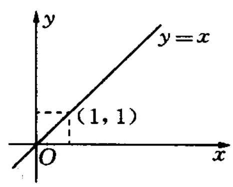
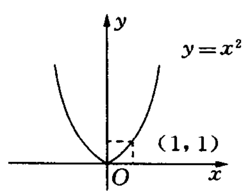
在这一章，我们将学习极限的概念，极限的运算法则，两个重要极限，无穷小与无穷大，函数在一点连续的概念，函数在区间内连续的概念，为后续内容的学习奠定基础.

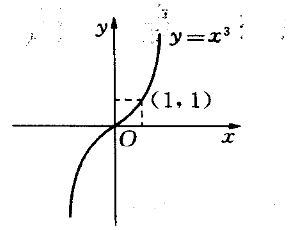
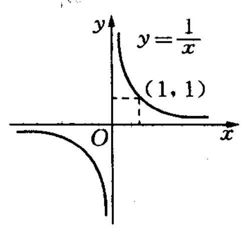
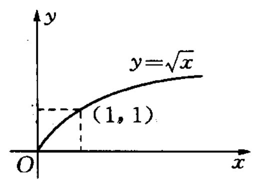
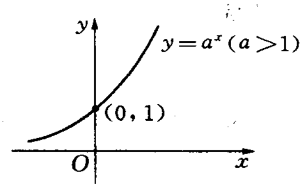
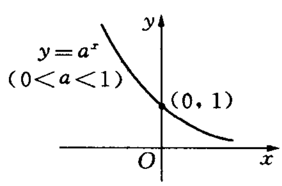
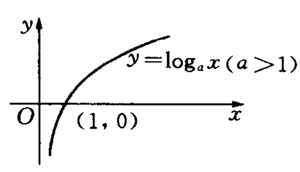
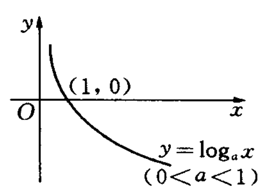
§13.1　初 等 函 数

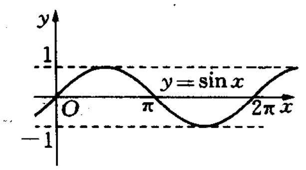
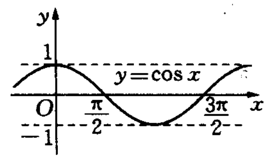
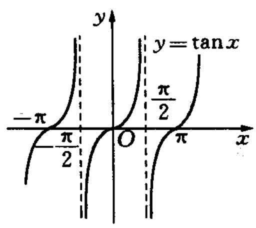
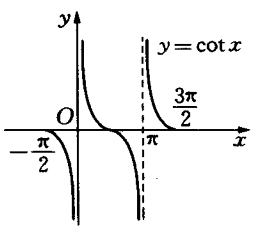
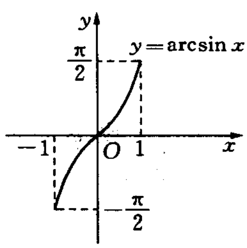
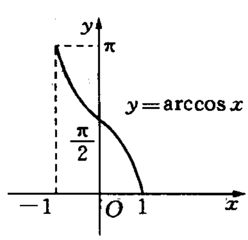
一、基本初等函数(函数库)

常数函数、幂函数 $y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{R})$、指数函数 $y = a^x(a > 0$，且 $a \neq 1)$、对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0$，且 $a \neq 1)$、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 这些函数我们在第一册教材中已经作了介绍. 为了今后查阅方便，现将它们的表达式、定义域、值域、图像和特性列出如表 13-1 所示.

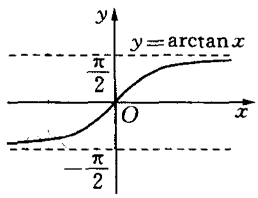
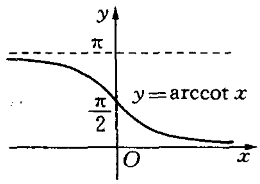
表 13-1

函数		定义域与值域	图像	特性
幂函数举例	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加

函数		定义域与值域	图像	特性
幂函数举例	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$内分别单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少

函数		定义域与值域	图像	特性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

续 表

函数		定义域与值域	图像	特性
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

二、复合函数

设有质量为 m 的物体,以初速度 v_0 竖直上抛,求它的动能 E 和时间 t 的关系.

由物理学知道,动能 E 是速度 v 的函数,

$$E=f(v)=\frac{1}{2}mv^2.$$

但速度 v 又是时间 t 的函数,如果不计空气的阻力,则

$$v=\varphi(t)=v_0-gt.$$

其中,g 是重力加速度,因此

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

于是动能 E 通过 v 而成为时间 t 的函数.我们就称 E 为一个复合函数,记作

$$E=f[\varphi(t)]=\frac{1}{2}m[\varphi(t)]^2=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

这里 $f[\varphi(t)]$ 表示复合函数,f 为外层函数,φ 为内层函数,内层函数 φ 表示首先要做的运算,而外层函数 f 表示其次要做的运算.一般地,有如下定义.

定义 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=g(x)$,通过 u 将 y 表示为 x 的函数,即

$$y=f[g(x)],$$

那么,y 就称为 x 的**复合函数**,其中 u 称为**中间变量**.

注意 上述复合过程是有条件的:函数 $u=g(x)$ 的值域全部或部分在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,否则复合函数将失去意义.

例 1 指出下列复合函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{1-x^3}$; (2) $y=\sin 2x$;

(3) $y=\cos^2 x$;　　　　　　　　　　(4) $y=\arcsin(e^x)$.

解　(1) $y=\sqrt{1-x^3}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^3$ 复合而成的，其中 u 是常数与幂函数的四则运算构成.

(2) $y=\sin 2x$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=2x$ 复合而成的.

(3) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成的.

(4) $y=\arcsin(e^x)$ 是由 $y=\arcsin u$ 与 $u=e^x$ 复合而成的.

例 2　设 $f(t)=\dfrac{1}{t+1}$, $\varphi(t)=1-t^2$, 求 $f[\varphi(t)]$和 $\varphi[f(t)]$.

解　$f[\varphi(t)]=\dfrac{1}{\varphi(t)+1}=\dfrac{1}{(1-t^2)+1}=\dfrac{1}{2-t^2}$,

$$\varphi[f(t)]=1-[f(t)]^2=1-\left(\frac{1}{t+1}\right)^2=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}.$$

例 3　求下列复合函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\ln x}$;　　　　　　　　　　(2) $y=\arcsin(x-1)$.

解　(1) $\ln x\geqslant 0$, 即 $\ln x\geqslant \ln 1$. 因为 $y=\ln x$ 是单调增加函数，所以 $x\geqslant 1$, 因此 $y=\sqrt{\ln x}$ 的定义域为$[1, +\infty)$.

(2) $-1\leqslant x-1\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant 2$, 即 $y=\arcsin(x-1)$ 的定义域为$[0, 2]$.

利用复合函数的概念，可把一些较复杂的函数分解成几个简单的函数，以便于对函数进行研究和计算. 两个函数的复合可推广到两个以上的函数的复合. 例如，函数 $y=\sqrt{\sin(2x+1)}$ 可看成是由函数 $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=2x+1$ 复合而成的.

三、初等函数

例 4　试指出下列函数中，哪些是基本初等函数？哪些是由基本初等函数与常数的四则运算所构成？哪些是复合函数？

$y=ax+b$,　　$y=x^3$,　　$y=\cos x$,　　$y=a^{\sin x}$,

$y=e^x+1$,　　$y=\lg\ln x$,　　$y=\arcsin x$,　　$y=\tan(x^2)$.

解　是基本初等函数的为

$$y=x^3,\ y=\cos x,\ y=\arcsin x.$$

由基本初等函数与常数的四则运算构成的为

$$y=ax+b,\ y=e^x+1.$$

是复合函数的为

$y=a^{\sin x}$, 可以看成由 $y=a^u$, $u=\sin x$ 复合而成；$y=\lg\ln x$, 是由 $y=\lg u$, $u=\ln x$ 复合而成的；$y=\tan(x^2)$, 是由 $y=\tan u$, $u=x^2$ 复合而成的.

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成的，并能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**. 例 4 所列的函数都是初等函数.

练习 13.1

1. 填空题：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 的定义域是________；

(2) $f(x)=\begin{cases} x-1, & 当\ x\geqslant 0\ 时; \\ 2-x^2, & 当\ x<0\ 时 \end{cases}$ 的定义域是________，$f(-1)=$________，$f(0)=$________，$f(1)=$________.

2. 选择题：

(1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是(　　).

(A) $(-1,\ 1)$　　(B) $[-1,\ 1]$　　(C) $\{-1,\ 1\}$　　(D) 以上都不对

(2) 已知 $f(x)=x^2$, $g(x)=3^x$, 则 $f[g(x)]=$(　　).

(A) 3^{2x}　　(B) 3^{x^2}　　(C) $3^x x^2$　　(D) 2^{x^3}

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^3-2x+1$；　(2) $y=\sqrt{e^x-1}$；　(3) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$；　(4) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4. 设 $f(x)=\arccos x$, 求 $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(1)$.

5. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数，并写出它们的定义域：

(1) $y=\sqrt{u}$, $u=x+5$；　　(2) $y=\lg u$, $u=x^2-1$.

6. 指出下列各函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{\cos x}$；　　(2) $y=5^{\sin x}$.

§13.2 极限的概念

一、数列的极限

数列就是按一定规律排列着的一列数：a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$，简记为 $\{a_n\}$.

其中，a_1 称为数列的第一项，a_2 称为数列的第二项，$\cdots$，a_n 称为数列第 n 项，又称**一般项**或**通项**.

现在我们通过数列的图像，观察当 n 无限增大时，无穷数列 $\{a_n\}$ 的变化趋势. 看下面两个数列：

(1) $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$；　　(2) $0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \cdots,\ 1+\dfrac{(-1)^n}{n},\ \cdots$.

通过观察可知，数列 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 的值随 n 无限增大而无限趋近于零. 这一变化趋势可以用图 13-1 来表示. 从图 13-1 中可以看出，当 n 增大时点 $(n,\ a_n)$ 从横轴上方无限接近于直线 $a_n=0$. 这表明当 n 无限增大时，数到 a_n 的值无限趋近于常数 0.

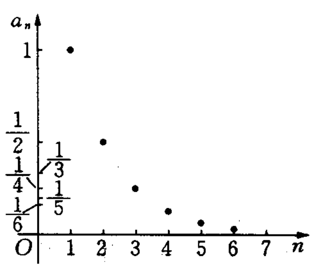


图 13-1

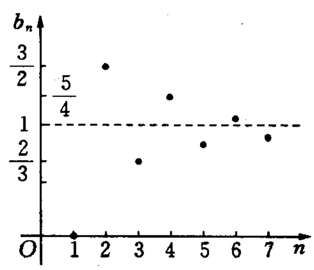


图 13-2

同样，数列 $b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ 的变化趋势可以用图 13-2 来表示. 从图 13-2 中可以看出，当 n 增大时点 (n, b_n) 从上、下两侧无限接近于直线 $b_n = 1$. 这表明当 n 无限增大时，数列 b_n 的值无限趋近于常数 1.

从上面例子的分析中，一般地，有下面的定义.

定义 1 如果无穷数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大时，数列的一般项 a_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋于无穷大时的**极限**. 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或当 } n \to \infty \text{ 时}, a_n \to A.$$

读作"当 n 趋于无穷大时，数列 $\{a_n\}$ 的极限等于 A". 因此，上述两个数列的极限可分别记作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1.$$

例 1 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$; (2) $a_n = \frac{2n-1}{n}$.

解 (1) 当 n 依次取 1, 2, 3, 4, …时，数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ 的各项依次为 $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{17}{16}$, …. 当 n 无限增大时，a_n 无限接近于 1. 根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1;$$

(2) 因为 $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$，当 n 依次为 1, 2, 3, 4, …时，数列 $a_n = \frac{2n-1}{n}$ 的各项依次为 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, …. 当 n 无限增大时，a_n 无限接近于 2. 根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2.$$

注意 如果数列极限存在，则数列极限定义中的 A 必须是一个确定的常数. 如果这样的常数 A 不存在，就称数列没有极限. 例如，数列 $a_n = n + 1$，当 $n \to \infty$ 时，a_n 也无限增大，它不可能趋近于一个确定的常数. 因此，这个数列的极限不存在.

例 2 观察数列 $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$，当 n 无限增大时，是否存在极限？

解 当 n 依次取 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, …时，数列 a_n 的变化依次为

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots$$

即当 n 无限增大时，a_n 在 1, 0, -1 三个值中跳动，并不趋于某个确定的常数，所以数列 a_n 的极限不存在.

例 3 求常数列 $a_n = 3$ 的极限.

解 这个数列的各项都是 3，当 n 无限增大时，3 与 a_n 完全相同，自然，它们之间无限接近.

根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3 = 3.$$

一般地,任何常数列 $a_n = C$ 的极限就是这个常数本身,即

$$\lim_{n\to\infty} C = C.$$

二、函数的极限

函数的极限与自变量的变化趋势有密切关系,我们主要研究以下几种自变量的不同变化趋势下函数的极限:

(1) $|x|$无限增大,记作: $x\to\infty$;

(2) x 无限增大,记作: $x\to+\infty$;

(3) $x<0$ 且$|x|$无限增大,记作: $x\to-\infty$;

(4) x 无限趋近于 x_0,记作: $x\to x_0$;

(5) $x<x_0$ 且无限趋近于 x_0,记作: $x\to x_0^-$;

(6) $x>x_0$ 且无限趋近于 x_0,记作: $x\to x_0^+$.

1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

观察当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势. 从图 13-3 可以看出:当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$的值无限趋近于常数 0. 对于这种变化趋势,一般地,有下面的定义.

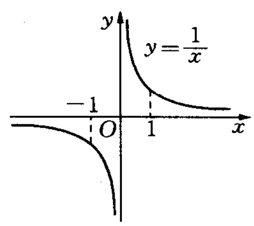


图 13-3

定义 2 如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$) 时,函数 $f(x)$的值无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } x\to\infty \text{ 时}, f(x)\to A.$$

根据定义 2,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时极限为 0,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的变化趋势,从图 13-3 中可以看出,函数 $f(x)$都无限趋近于常数 0. 一般地,有下面的定义.

定义 3 如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$) 时,函数 $f(x)$的值无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$) 时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ 或当 } x\to+\infty \text{ 时}, f(x)\to A,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \text{ 或当 } x\to-\infty \text{ 时}, f(x)\to A.$$

根据定义 3,显然

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

解 如图 13-4 所示,容易看出

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$$

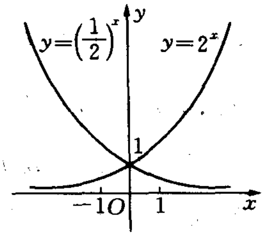


图 13-4

例 5 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$.

解 如图 13-5 所示,容易看出

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

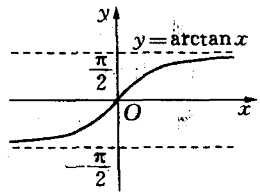


图 13-5

由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时,函数 $\arctan x$ 分别趋近于$\frac{\pi}{2}$和$-\frac{\pi}{2}$,而不是无限趋近于同一个确定的常数,所以当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 的极限不存在.

我们有下面的等价命题:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

2. 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

观察当 $x\to 3$ 时,函数 $f(x)=1+\frac{x}{3}$ 的变化趋势,作函数 $y=1+\frac{x}{3}$ 的图像,如图 13-6 所示.

当 x 从 3 的左侧无限趋近于 3 时,即 x 取

$2.9,\ 2.99,\ 2.999,\ \cdots\to 3$

时,对应的函数 $f(x)$ 的值从

$1.97,\ 1.997,\ 1.9997,\ \cdots\to 2.$

当 x 从 3 的右侧无限趋近于 3 时,即 x 取

$3.1,\ 3.01,\ 3.001,\ \cdots\to 3$

时,对应的函数 $f(x)$ 的值从

$2.03,\ 2.003,\ 2.0003,\ \cdots\to 2.$

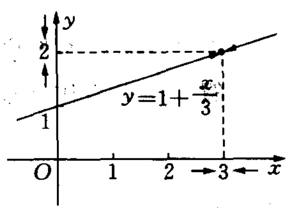


图 13-6

根据以上分析及图 13-6 可知,当 $x\to 3$ 时,函数 $f(x)=1+\frac{x}{3}$ 的值无限趋近于 2. 一般地,有下面的定义.

定义 4 如果当 x 无限趋近于定值 x_0,即 $x\to x_0$(约定 $x\neq x_0$)时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**,记作

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$.

根据定义 4,上例中当 $x\to 3$ 时,$f(x)=1+\frac{x}{3}$ 的极限为 2,即 $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\frac{x}{3}\right)=2$.

例 6 讨论函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 当 $x\to 1$ 时的极限.

解 作出函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的图像,如图 13-7 所示. 注意到函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处无

定义. 当 $x \neq 1$ 时, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$. 容易看出,当 x 无论从 1 的左侧或 1 的右侧无限趋近于 1 时,函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值都无限趋近于 2. 因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

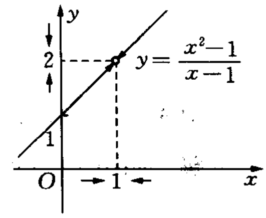


图 13-7

由此可见,函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限值与函数在 $x=x_0$ 时有无函数值 $f(x_0)$ 无关. 如例 6 中的函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, 当 $x\to 1$ 时,有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$, 而由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 时无意义, $f(1)$ 却不存在.

例 7 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

解 作函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图像如图 13-8 所示. 观察当 $x\to 0$ 时, $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的变化趋势. 容易看出,当 $x\to 0$ 时, $\sin x\to 0$, $\cos x\to 1$, 所以有

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0;\ \lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

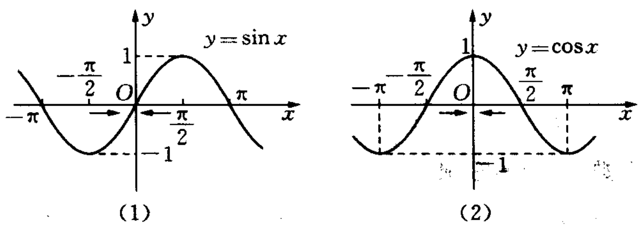


图 13-8

例 8 观察极限 $\lim\limits_{x\to x_0}C$ (C 为常数).

解 把 C 看作常数函数 $f(x)=C$, 则当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 的值恒等于 C. 因此有

$$\lim_{x\to x_0}C=C.$$

即常数的极限是它本身.

下面讨论当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的左极限与右极限.

定义 5 如果 $x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

如果当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

由图 13-6 可以看出,函数 $f(x)=1+\dfrac{x}{3}$ 当 $x\to 3$ 时的左极限为

$$\lim_{x\to 3^-}\left(1+\frac{x}{3}\right)=2,$$

右极限为

$$\lim_{x \to 3^+}\left(1+\frac{x}{3}\right)=2.$$

它们都等于函数 $f(x)=1+\frac{x}{3}$ 当 $x\to 3$ 时的极限.

一般地,有下面的等价命题:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例 9 讨论函数:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时;} \\ x+1, & \text{当 } x>0 \text{ 时} \end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的极限.

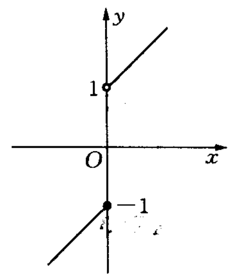


图 13-9

解 作出这个分段函数的图像,如图 13-9 所示.由图可见,函数 $f(x)$当 $x\to 0$ 时的左极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

右极限为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

因为当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)$的左、右极限虽各自存在但不相等,所以,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

练习 13.2

1. 填空题:

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=$ ________;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arccot} x=$ ________.

2. 选择题:

(1) 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(-1)^n\cos\frac{n\pi}{2}$, 则它的第七项是(　　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) 0　　(D) 以上都不对

(2) 数列 $1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4^2}, 1, \frac{1}{4^3}, \cdots$的极限值是(　　).

(A) 1　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) 0　　(D) 不存在

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=b\ (a\neq b)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$的值是(　　).

(A) a　　(B) b　　(C) a 或 b　　(D) 不存在

(4) 若 $f(x)=2$, 则$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$的值是(　　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 3^2　　(D) 不存在

3. 观察并写出下列极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$;　　(3) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)$;　　(4) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.