复旦大学数学系主编

数学物理方程

谷超豪　李大潜　陈恕行
沈玮熙　秦铁虎　是嘉鸿　编

海科学技术出版社

数 学 物 理 方 程

复旦大学数学系　主编

谷超豪　李大潜　陈恕行
沈玮熙　秦铁虎　是嘉鸿　编

上海科学技术出版社

责任编辑 张致中

数学物理方程

复旦大学数学系 主编

谷超豪 李大潜 陈恕行 沈玮熙 秦铁虎 是嘉鸿 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 9 字数 234,000

1987 年 4 月第 1 版 1987 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—4,200

书号：13119·1402 定价：1.80 元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学力学专业的教材进行改革.这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订从1962年到1965年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验. 当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的.

1980年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲。同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性和灵活性相结合的原则."按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革. 我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材.

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程. 这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端.

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的. 其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是必不可少的. 这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据. 但是我们还注意到，在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化，尽量根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑，使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计

划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律．我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学．

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简练，并起到承上启下的作用．在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受，正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系．

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材，都经过多次的课堂教学实践．一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学．我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版。

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务．由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟．

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢．

复旦大学数学系

1982.4

编者的话

本书是作为高等学校数学系“数学物理方程”基础课的教材而编写的．根据“数学物理方程”这门课程的要求和特点，以及我们过去讲授这门课程的体验，在本书的指导思想和具体安排方面，我们有如下几点不够成熟的看法．

(1) 数学物理方程主要是指从物理学以及其他自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程．不论是方程的归结还是问题的提出都紧密地联系于所考察的物理模型，不少的求解方法及解的性质等等也都或多或少地可以从相应的物理模型中得到启示，而最后所得的解或所阐明的解的性质也要应用于具体的问题并同时经受检验．因此，讲授这门课程，必须紧密地结合有关的物理模型，始终注意从中吸取丰富的养料，并不断注意培养同学在这方面的兴趣和能力，才能达到生动活泼、事半功倍的效果．要这样做，不仅要有物理、力学等方面的必备的基础，而且还要有从物理模型出发归结为数学问题来进行研究(即建立数学模型)的能力．这两方面，对同学来说，都是需要加以训练和培养的．遗憾的是，这一点从教和学两方面都往往容易被忽视．为了改变这一状况，我们在本书中相对地加重了这一方面的内容和训练，由此也可以更清楚地看到数学物理方程的确是数学联系实际的一个重要的桥梁。

(2) 要结合物理模型来讲授课程的内容，但又不能局限于具体的物理模型，还必须充分地发挥用数学方法进行抽象思维的威力，正确地处理好从具体到抽象、从特殊到一般的关系，才能将所得到的结论和方法用于更大范围中的现象和事物，起到举一反三的作用．在本书中，我们在具体讨论热传导方程、波动方程及调和方程这三类典型方程之前，先在第一章中讲二阶线性偏微分方程的分类，从总体上说明这三类典型方程的特点；而在二、三、四章分

别讨论了这三类典型方程之后，在第五章不仅对它们的特点和性质进行分析比较，还从特征理论的角度对一般的二阶线性偏微分方程进行讨论，并指出了这三类典型方程分别代表了一般的二阶线性抛物型、双曲型及椭圆型方程的共性，希望能帮助读者开阔视野，起到通过典型来带动一般的效果.

(3) 数学物理方程的一个重要的任务是求解，而求解过程又往往比较复杂. 为了培养同学具有熟练求解问题的能力，应该要求他们平时认真地做练习，并给以切实的指导. 有一本书的作者这样说过："一本没有例题的教科书与一本有例题的教科书之间的区别，与同学会用一种语言看书与学会用一种语言讲话之间的区别一样". 我们希望同学在学习了这门课程后，能够用这种科学的语言来"讲话"，即能真正地用来解决一些实际问题，因此，在本书中除注意了习题的精选以外，还增设了一定数量的例题.

(4) 数学物理方程是一门发展相当迅速的学科，包含了非常丰富的内容. 本书重点讲授一些经典的材料，它们也是进一步学习与研究近代偏微分方程理论的必备的基础. 除此以外，我们还力图以比较粗略或简要的方式介绍与近代偏微分方程的研究密切有关的一些概念、内容和方法，如 δ 函数(第五章及附录三)、广义解(第七章)、对称双曲型方程组和能量积分方法(第六章)等，希望能成为读者进一步入门的一个向导. 至于偏微分方程的数值求解方法，由于它是另一门课程的主题，在本书中不应占有太大的比重，也不宜作过于具体的展开. 我们只着重强调数学物理方程的理论对其数值解法的指导作用，即指出有关的数值解法实际上是以对偏微分方程解的概念的不同理解为出发点的. 这对读者进一步学习、研究偏微分方程的数值解可望提供一个较好的指南.

对于实际的教学，如果使用本教材上一学期(每周三～四小时)的课程，建议可重点讲授第一章、第二章(连同附录一、二)、第三章、第四章(除去 §5)以及第五章的一小部分(主要是特征理论及三类典型方程的比较). 如果时间还有多余，则建议再讲第七章. 至于第六章以及第五章中的大部分内容(包括附录三)，则可以安

排作为同学课外阅读的材料或留作选修课的教材．重要的是，要安排足够的时间让同学多作一些练习，使所学的知识真正地掌握和巩固．

本书的初稿曾印成讲义于1983年度第一学期用作复旦大学81级数学专业和计算数学专业学习本课程时的教材．接着，又在教学实践的基础上，将初稿作了认真的增订和修改．限于编者的水平和缺少充分的教学实践，现在的定稿离开主观上想达到的要求还相距很远，错误或不妥之处更在所难免，恳切地期望同志们提出宝贵的意见．

编 者

1985年11月

目　录

第一章

引　论

本章在§1中介绍有关数学物理方程的一些基本概念及这门学科的概况，在§2中对二自变数的二阶线性偏微分方程讨论了分类及化标准型的问题.

§1 引　言

1.1 偏微分方程及其基本概念

客观世界中的物理量(例如温度、速度等等)一般是随时间及空间位置的变化而变化的，因此总可以用以时间坐标 t 及空间坐标 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 为自变数的函数 $u(t, x)=u(t, x_1, x_2, x_3)$ 来表示. 这些物理量的变化所服从的规律又往往用它们关于时间坐标及空间坐标的某些阶变化率之间的一些确定的关系式来表示，即可写为函数 u 关于 t 及 x_1, x_2, x_3 的某些阶偏导数之间的一些关系式. 例如，由热量平衡原理，一个均匀、各向同性传热体的温度分布函数 $u=u(t, x_1, x_2, x_3)$ 应该满足下面的关系式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (a>0\text{ 常数}); \qquad (1.1)$$

由此，该物体的一个稳定的温度分布 $u=u(x_1, x_2, x_3)$ (即设温度不随时间 t 变化，达到稳定状态)就应满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0. \qquad (1.2)$$

此外，由牛顿第二定律可知，对于一根两端固定而张紧着的均匀弦，当它在平衡位置附近作微小横向振动时，其上各点的位移 $u=u(t, x)$ 应满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (a>0\ 常数) \tag{1.3}$$

等等. 这种包含未知函数及其偏导数的等式,统称为偏微分方程. 在不至引起误解的情况下,在本书中有时也简称其为方程或微分方程.

一般地说,若自变数为 $x_1, x_2, \cdots, x_n\ (n\geqslant 2)$,未知函数为 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$,则关于 u 的偏微分方程的一般形式是

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, Du, \cdots, D^N u)=0, \tag{1.4}$$

其中 F 是其变元的已知函数,Du 简记 u 的一阶偏导数:

$$Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

而一般地,$D^k u\,(k=2, \cdots, N)$ 简记 u 的 k 阶偏导数:

$$D^k u=\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\ k_1+k_2+\cdots k_n=k,\quad k_1, \cdots, k_n\geqslant 0\ 整数\right). \tag{1.5}$$

在偏微分方程中所含的未知函数 u 的偏导数的最高阶数,称为偏微分方程的阶数. 于是,若 F 的确含有 $D^N u$,则(1.4)的阶数为 N. 此外,在自变数的个数 $n=1$ 时,(1.4)就化为一个常微分方程,而偏微分方程则对应于 $n\geqslant 2$ 的情况.

什么是偏微分方程的解呢? 设 Ω 是自变数空间 $(x_1, \cdots, x_n)$ 中的一个区域,如果 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 是在 Ω 中定义的足够光滑(例如 N 次连续可微)的函数,且将它代入(1.4)式能使其在 Ω 中恒等地成立,则称 u 是该方程在 Ω 中的一个经典意义下的解,称为经典解. 以后可以看到,偏微分方程的解的概念可以用各种各样的方法加以扩充,但上述经典解的概念是最易于为人理解的,也是本书中著重讨论的对象. 今后,如无特殊需要,我们就将经典解称为解.

在一些情况下,未知函数的个数可以不止一个,它们所满足的偏微分方程的个数也不止一个. 这样,由若干个偏微分方程联立在一起,就构成了偏微分方程组. 流体力学、弹性力学、电动力学等等的基本方程都是偏微分方程组. 在通常所遇到的偏微分方程组

中，方程的个数和未知函数的个数大都是相等的．但有时也会出现方程个数大于未知函数个数（超定）的情况，或是方程个数小于未知函数个数（欠定）的情况．

如果在一个偏微分方程（组）中，所有的未知函数及其一切偏导数都是线性地出现的，则称这个偏微分方程（组）为线性偏微分方程（组）；否则，就称为非线性偏微分方程（组）．线性偏微分方程（组）通常是比较易于进行研究的，已经对它建立了系统的理论，并不断在深入向前发展．而对非线性偏微分方程（组）的研究则一般要困难得多，解的性质和线性情形也有较大的不同，很难用一个统一的方法来加以处理，其研究往往更紧密地结合着相应的物理模型，用不同的方法来处理各种不同性质的问题．但是，很多意义重大的问题归结为非线性偏微分方程的研究（例如，流体力学方程组就是非线性的），而且随着研究的深入，有些原先可以用线性偏微分方程来近似描述的问题，也必须考虑非线性项的影响，而化为非线性偏微分方程的问题．因此，从对线性方程的研究逐步发展到对非线性方程的研究，也是当前偏微分方程发展的一个重要的特点．

对于非线性偏微分方程（组）来说，为了深入研究的需要和说明的方便，还可以进一步区分出一些比较特殊的类型．如果所考察的非线性偏微分方程（组）对未知函数的一切最高阶偏导数是线性的，则称其为拟线性偏微分方程（组）．这时，方程（组）中含有未知函数的一切最高阶偏导数的部分，称为此方程（组）的主部（在线性方程（组）的情形，也可以类似地定义主部）．对于拟线性方程（组），其主部中未知函数的最高阶偏导数前的系数除了可能依赖于自变数外，还可能依赖于未知函数及其较低阶的偏导数．特别，若这些系数只是自变数的函数，而和未知函数及其偏导数无关，则称此偏微分方程（组）为半线性偏微分方程（组）．

这样，例如说

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

是一阶(常系数)的线性偏微分方程;

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.7}$$

是一阶拟线性方程;哈密顿-雅科比 (Hamilton-Jacobi) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{1.8}$$

是一阶非线性方程,其中 f 是一个已知的非线性函数;而单复变解析函数 $F(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ $(z=x+iy)$ 的实部和虚部所满足的柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \tag{1.9}$$

是一阶(常系数)的线性偏微分方程组.

在二阶的情形,方程(1.1)(称为热传导方程),方程(1.2)(称为调和方程或拉普拉斯(Laplace)方程)及方程(1.3)(称为弦振动方程)都是二阶常系数线性方程;反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=f(u) \tag{1.10}$$

是二阶的半线性方程;而非线性弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right), \tag{1.11}$$

其中

$$k(v)=\frac{v}{\sqrt{1+v^2}},$$

则是二阶拟线性方程,等等.

对高阶的方程及方程组,也可以举出类似的例子来说明上述的概念. 例如描述色散波的 KdV(Korteweg-de Vrie)方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.12}$$

为三阶半线性方程,等等.

1.2 数学物理方程的研究对象

偏微分方程理论的形成和发展是和物理学以及其他自然科

学、技术科学的发展密切相关，并且互相促进和推动的.很多重要的物理、力学学科的基本方程本身就是偏微分方程.偏微分方程理论的研究成果也常常用来描述、解释或预见各种自然现象，并被应用于各门科学和工程技术. 同时，偏微分方程的研究也和分析、几何、代数、拓扑等其他数学分支的发展紧密联系、互相推动. 因此，偏微分方程这门学科是数学理论和实际应用之间的一个重要的桥梁. 从这个意义上说，各种各样的偏微分方程，其作用和地位是不相同的，不应一视同仁地加以对待. 那些和物理学以及其他自然科学、技术科学密切有关的偏微分方程应该受到更多的重视，偏微分方程的实际发展状况也充分地反映了这一点. 所谓**数学物理方程**，就主要指从物理学以及其他自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程，有时也包括与此有关的积分方程、微分积分方程，甚至常微分方程等.

容易理解，数学物理方程这个概念的内涵，不是一成不变，而是随着历史的发展而发展的. 微积分理论形成后不久，从十八世纪初开始，人们就开始结合物理、力学问题来研究偏微分方程. 最早研究的几个方程就是弦振动方程(1.3)、热传导方程(1.1)及调和方程 (1.2). 其中弦振动方程是达朗贝尔 (d'Alembert)，欧拉 (Euler)，丹尼尔·贝努利 (Daniel Bernoulli) 等人首先系统加以研究的；对于二维或三维的波动现象(例如薄膜的振动和声音的传播)可以得到类似的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=0 \quad (a>0\ \text{常数}) \tag{1.13}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (a>0\ \text{常数}), \tag{1.14}$$

统称为**波动方程**.傅立叶(Fourier)为了研究热传导问题首先引入了后来被称为傅立叶级数的数学方法，这不仅在物理学中很快得到广泛的应用，而对其数学基础的研究则吸引了十九世纪一些最伟大的数学家如狄利克雷 (Dirichlet)、黎曼、维尔斯特拉斯(Weierstrass) 及康托尔 (Cantor)，并最终导致了集合论的问世，在分