

21世纪高等学校计算机科学与技术规划教材

离散数学

LISAN SHUXUE

刘爱民 编著



北京邮电大学出版社

www.buptpress.com

21 世纪高等学校计算机科学与技术规划教材

离散数学

刘爱民 编著

北京邮电大学出版社

内 容 简 介

本书是作者参照国内外多种同类教材,结合多年的教学实践,在自编讲义的基础上整理而成的。全书覆盖了计算机专业和电子信息专业最需要的基本内容,它包括四大部分共14章。介绍了数理逻辑、集合论、代数系统和图论的基础知识以及这四个部分之间的内在联系,叙述详细、推演严密,注重基础,深入浅出,便于理解。

本书可作为高等院校计算机类、电子信息类等相关专业的教材,也可供计算机专业的自考人员、从事计算机研究的工作人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/刘爱民编著. —北京:北京邮电大学出版社,2004

ISBN 7-5635-0835-X

I. 离... II. 刘... III. 离散数学—高等学校—教材 IV. 0158

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第009366号

书 名: 离散数学

编 著: 刘爱民

策 划: 三文工作室

E-mail: sanwen99@mail.edu.cn

责任编辑: 陈露晓 付晓霞

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路10号(100876)

电话传真: 010-62282185(发行部) 010-62283578(传真)

经 销: 各地新华书店

印 刷: 国防科技大学印刷厂印刷

开 本: 787mm×960mm 1/16

印 张: 22.5

字 数: 414千字

版 次: 2004年5月第1版 2005年1月第2次印刷

ISBN 7-5635-0835-X/O·77

定 价: 29.50元

如有质量问题请与发行部联系

版权所有 侵权必究

21 世纪高等学校计算机科学与技术规划教材

编委会

- | | | |
|----|-----|---------------------|
| 主任 | 陈火旺 | 中国工程院院士,国防科技大学教授 |
| 委员 | 周立柱 | 清华大学计算机系主任 |
| | 杨放春 | 北京邮电大学计算机科学与技术学院院长 |
| | 杨学军 | 国防科技大学计算机学院院长 |
| | 徐晓飞 | 哈尔滨工业大学计算机科学与技术学院院长 |
| | 李仁发 | 湖南大学计算机与通信学院院长 |
| | 卢正鼎 | 华中科技大学计算机学院院长 |
| | 李志蜀 | 四川大学计算机学院院长 |
| | 戴居丰 | 天津大学信息学院、软件学院院长 |
| | 蒋昌俊 | 同济大学计算机科学与工程系主任 |
| | 何炎祥 | 武汉大学计算机学院院长 |
| | 周兴社 | 西北工业大学计算机系主任 |
| | 陈志刚 | 中南大学信息学院副院长 |
| | 姜云飞 | 中山大学软件学院院长 |
| | 周昌乐 | 厦门大学软件学院院长 |
| | 齐勇 | 西安交通大学计算机科学与技术系主任 |
| | 赵书城 | 兰州大学计算机学院院长 |
| | 孟祥旭 | 山东大学计算机学院院长 |

序

自 20 世纪 80 年代以来,高等学校计算机教育发展迅速,计算机教育的内容不断扩展、程度不断加深。特别是近十年来,计算机向高度集成化、网络化和多媒体化发展的速度一日千里;社会信息化不断向纵深发展,各行各业的信息化进程不断加速;计算机应用技术与其他专业的教学、科研工作结合更加紧密;各学科与以计算机技术为核心的信息技术的融合,促进了计算机学科的发展,各专业对学生的计算机应用能力也有更高和更加具体的要求。

基于近年来计算机学科的长足发展,以及国家教育部关于计算机基础教学改革的指导思路,我们确立了这套“21 世纪高等学校计算机科学与技术规划教材”的编写计划与编写思想。教材是教学过程中的“一剧之本”,是高校计算机教学的首要问题。该套系列教材编写计划的制定凝聚了编委会和作者的心血,是大家多年来在计算机学科教学和研究成果的体现,该套教材得到了陈火旺院士的亲自指导与充分肯定。

这套系列教材由北京邮电大学出版社三文工作室精心策划和组织。编写过程中,充分考虑了计算机学科的发展和《计算机学科教学计划》中内容和模块的调整,使得整套教材具有科学性和实用性。整套系列教材体系结构按课程设置进行划分。每册教材均涵盖了相应课程教学大纲所要求的内容,既具备学科设置的合理性,又符合计算机学科发展的需要。从结构上遵循教学认知规律,基本上能够满足不同层次院校、不同教学计划的要求。

各册教材的作者均为多年来从事教学、研究的专家和学者,他们有丰富的教学实践经验,所编写的教材体系结构严谨、内容充实、层次清晰、概念准确、论理充分、理论联系实际、深入浅出、通俗易懂。

教材建设是一项长期艰巨的系统工程,尤其是计算机科学技术发展迅速、内容更新快,为使教材更新能跟上科学技术的发展,我们将密切关注计算机科学技术的发展新动向,以使我们的教材编写在内容上不断推陈出新、体系上不断完善,以适应高校计算机教学的需要。

21 世纪高等学校计算机科学与技术规划教材编委会

2003 年 12 月

前 言

离散数学是计算机专业的一门核心课程,为计算机科学和技术的发展奠定了重要的数学基础,其基本思想、概念和方法广泛渗透到计算机科学和技术的各个领域,如谓词演算成为程序理论的一种重要研究工具;布尔代数 of 开关电路的研究提供了重要的分析工具,并导致数字逻辑理论的建立;代数结构中的群环域理论,为编码理论提供了新的途径,后两者也是电子和信息专业的基础理论。数字逻辑理论是数字电路的基本理论,数字信号作为现代通信最主要的手段,其相应处理必须利用数字电路,而在数字信号的传送过程中,编码是不可缺少的;有限状态机理论不仅贯穿于时序逻辑设计的分析和设计过程,同时为通信系统的仿真方法提供了有力的工具;图论理论则广泛应用到信号系统的分析、电网络及通信网络之中。因此完全可以说离散数学的基本理论和研究成果也广泛应用到电子和信息领域,离散数学的这些重要成果和作用,使得它成为一个计算机科学工作者和工程师所必备的基础理论知识,同时也是一个从事电子和信息处理的人员不可或缺的基础知识。

离散数学在纯粹数学和应用数学中都占有重要的地位,它的内容极其丰富,其中许多重要问题源于数学游戏或者一些看似简单的趣味数学问题的解决。从其发展历史来看,尽管 300 多年前离散数学有关问题就出现了,而且经过这几百年的研究发展,许多问题已成为一个一个的体系。但正是由于电子计算机的问世,计算技术的发展,人们才对这些离散量进行分析,研究其结构、特点及它们之间的联系,从而形成一门较为完整的离散数学理论。反过来,离散数学理论的发展也促进了计算技术的飞跃发展。

本书覆盖了离散数学的基本内容,包括计算机专业和电子信息专业最需要的部分,共分为四大部分 14 章,它们是数理逻辑、集合论、代数系统、图论。尽管作为应用数学的离散数学应用非常广泛,但许多读者了解了离散数学的基本概念,却不知怎样应用。为此本书特别阐述了一些电子和信息方面的应用,如数字逻辑电路初步就介绍了怎样运用逻辑等值演算理论设计数字逻辑电路,这些章

节均已标出。

一般来说,本书所涉及的四大部分内容都各成一体,但它们有着内在的联系,如利用数理逻辑这种应用形式化语言研究推理的方式,可以充分地描述集合论的各种运算,而有了集合和运算之后,才可以定义代数系统,图论作为关系的形象化表示,又提供了特殊的方法分析集合元素之间的关系。考虑到这种内在的逻辑联系,本书编排以数理逻辑作为基础首先介绍,掌握好它对后续内容可以起到事半功倍的效果,所以这里着墨较重较细。然后应用数理逻辑充分地介绍另一个基础集合论,这不仅可以加强新知识的理解,还可以巩固数理逻辑的知识。并不是每位读者都了解离散数学所需要的数学基础,本书给出了部分用到的数学工具,这些内容实际上也是离散数学的有机组成部分。

学习离散数学的目的在于培养一个人的抽象思维能力、逻辑思维能力以及综合归纳分析的能力,因此本书力求理论上叙述严谨、推演严密,同时注重基础知识完整,概念与实例密切结合,深入浅出,便于理解。

本书是编者近年来在北京大学信息科学技术学院讲述离散数学自编讲义的基础上整理而成的,在编写过程中,参考了国内外多种离散数学文献,并总结了编者的教学经验。它可作为高等理工科院校计算机类、工程类专业本、专科离散数学课程的教材,而其中的基础理论部分对计算机专业自考人员理解基本概念很有帮助。

本书内容经过多届同学们的使用,他们提出了许多宝贵意见,特别是孙琰同学为讲义成书做了许多工作,在此一并感谢。

由于编者水平有限,加之成书时间仓促,缺点、错误在所难免,敬请读者批评指正。

编者
2004年1月

目 录

第一部分 数理逻辑

第一章 命题逻辑基本概念	(3)
§ 1.1 命题及其符号化	(3)
§ 1.1.1 命题	(3)
§ 1.1.2 命题符号化	(4)
§ 1.2 合式公式和真值赋值.....	(10)
§ 1.2.1 合式公式及层次	(10)
§ 1.2.2 真值赋值及公式分类	(12)
§ 1.3 真值表和真值函数	(14)
习题一	(16)
第二章 命题逻辑等值演算	(19)
§ 2.1 等值关系	(19)
§ 2.2 联结词的全功能集	(24)
§ 2.3 范式	(27)
§ 2.4 数字逻辑电路初步	(34)
§ 2.4.1 门电路和触发器	(34)
§ 2.4.2 组合逻辑电路的设计	(36)
§ 2.4.3 时序逻辑电路的设计	(38)
习题二	(42)
第三章 命题逻辑自然推理	(44)
§ 3.1 推理的形式结构	(44)
§ 3.2 自然推理系统 P	(47)
§ 3.3 常见的证明方法	(49)
习题三	(53)

第四章 谓词逻辑的基本概念	(54)
§ 4.1 谓词和量词	(55)
§ 4.2 一阶语言	(59)
§ 4.2.1 一阶语言	(60)
§ 4.2.2 解释和赋值	(63)
§ 4.2.3 公式的分类	(66)
§ 4.3 一阶逻辑等值演算	(67)
§ 4.3.1 等值演算	(67)
§ 4.3.2 前束范式	(69)
§ 4.4 一阶逻辑形式推理	(71)
§ 4.4.1 推理定律	(71)
§ 4.4.2 推理规则	(72)
习题四	(75)

第二部分 集合论

第五章 集合代数	(79)
§ 5.1 集合的概念及表示	(79)
§ 5.2 集合运算	(85)
§ 5.3 集合定律	(89)
§ 5.4 有限集的计数问题	(90)
§ 5.5 有序对与卡氏积	(94)
习题五	(96)
第六章 二元关系	(99)
§ 6.1 二元关系及其表示	(99)
§ 6.2 二元关系的性质	(102)
§ 6.3 二元关系的运算	(104)
§ 6.3.1 关系的限制和像	(104)
§ 6.3.2 关系的逆	(106)
§ 6.3.3 关系的合成	(106)
§ 6.3.4 关系的闭包	(109)
§ 6.4 特殊关系及其性质	(117)
§ 6.4.1 等价关系及性质	(117)
§ 6.4.2 相容关系及性质	(120)

§ 6.4.3 序关系及性质	(123)
习题六	(127)
第七章 函数	(130)
§ 7.1 函数基本概念	(130)
§ 7.2 函数的合成	(134)
§ 7.3 反函数	(137)
§ 7.4 特殊函数	(140)
§ 7.4.1 特征函数	(140)
§ 7.4.2 变换函数和置换函数	(142)
§ 7.5 集合的基数	(146)
习题七	(150)

第三部分 代数系统

第八章 代数结构	(152)
§ 8.1 代数系统基本概念	(152)
§ 8.1.1 代数运算及其性质	(152)
§ 8.1.2 代数系统	(156)
§ 8.1.3 积代数和商代数	(157)
§ 8.2 半群和群	(159)
§ 8.2.1 半群	(159)
§ 8.2.2 群	(161)
§ 8.2.3 子群和陪集	(170)
§ 8.3 环和域	(174)
* § 8.4 差错编码初步	(179)
* § 8.5 差错解码初步	(185)
习题八	(188)
第九章 格与布尔代数	(191)
§ 9.1 格的定义和性质	(191)
§ 9.2 分配格与有补格	(197)
§ 9.3 布尔代数	(200)
习题九	(203)

第四部分 图 论

第十章 图	(207)
§ 10.1 图的基本概念	(207)
§ 10.1.1 有向图和无向图	(207)
§ 10.1.2 关联和相邻或邻接	(209)
§ 10.1.3 点的度数	(209)
§ 10.1.4 特殊图	(211)
§ 10.1.5 图的同构	(213)
§ 10.2 图的运算	(214)
§ 10.3 图的连通性	(218)
§ 10.3.1 通路和回路	(218)
§ 10.3.2 无向图的连通性	(219)
§ 10.3.3 有向图的连通性	(222)
§ 10.4 图的矩阵表示	(225)
§ 10.4.1 无向图的矩阵表示	(225)
§ 10.4.2 有向图的矩阵表示	(230)
习题十	(234)
第十一章 通路应用问题	(236)
§ 11.1 最短径问题	(236)
§ 11.2 关键路径问题	(240)
§ 11.3 网络最大流量问题	(242)
§ 11.4 穿程问题	(248)
§ 11.4.1 欧拉图	(248)
§ 11.4.2 哈密顿图	(250)
习题十一	(254)
第十二章 树	(256)
§ 12.1 无向树基本概念	(256)
§ 12.2 生成树	(258)
§ 12.2.1 生成树及其做法	(258)
§ 12.2.2 生成树的应用	(262)
§ 12.3 最小生成树	(266)
§ 12.4 根树	(269)

§ 12.5 二叉树应用	(275)
习题十二	(279)
第十三章 平面图	(281)
§ 13.1 平面图基本概念	(281)
§ 13.2 欧拉公式	(284)
§ 13.3 平面图的判断	(287)
§ 13.4 对偶图及着色	(289)
习题十三	(293)
第十四章 偶图与匹配	(295)
§ 14.1 偶图的判断	(295)
§ 14.2 匹配	(296)
习题十四	(300)
附录 1 数学工具	(302)
附录 2 习题答案或提示	(308)
参考文献	(348)

第一部分 数理逻辑

一切科学,不论是社会科学,还是自然科学,都离不开推理。正确的推理形式应当满足:从正确的前提出发,必然得出正确的结论。因此,要保证推出的结论正确,除了要有正确的推理过程,还要保证推理的前提正确,这就是推理规则。逻辑学的主要目的就是要探索出一套完整的规则,按照这些规则就可以确定任何特定的论证是否有效。

最初的研究采用的是自然语言研究推理,其开创者是公元前4世纪的希腊思想家亚里士多德(Aristotle)。自然语言丰富而生动,但具有二义性(即一个词可以表达多种不同的意义),这就给精确地研究推理形式造成了困难。为了精确地表达思想,需要使用一种概括性很强的且独立于任何特定的论证或所涉及到的学科的一种语言。这种语言是一种符号化的形式语言,它没有二义性。使用这种形式化语言,可以将推理理论公式化,并且依据推理规则就可以机械地确定论证的有效性。只有这样,才能把这些推理规则应用到各个学科和各个领域中去。17世纪的德国哲学家莱布尼茨(Leibniz)和19世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole)为此作了开创性的工作。

数理逻辑实际上是用数学方法研究推理理论的一种符号化的形式体系,即用数学方法研究推理过程的一门科学。由于数理逻辑使用了特定的表意符号,因此又称为**符号逻辑**。

近几十年来,数理逻辑发展迅速,研究范围不断扩大,应用领域日益广泛,概括起来,可以分为五大分支:逻辑演算、公理集合论、证明论、递归论和模型论,其中逻辑演算是数理逻辑中最基础的部分。经过二百多年的努力,逻辑学家在上个世纪初建立起一套完备的命题逻辑和一阶逻辑的演算系统,我们称其为**经典逻辑**或**标准逻辑**。从20世纪40年代开始,逻辑学不仅与数学相互渗透、结合,还与社会科学、自然科学和技术相互渗透、结合。人们扩充、改造经典的一阶逻辑,用数学方法发展了形形色色的非标准逻辑,以适应各方面应用的需要,例如用于计算机科学和人工智能的程序逻辑、算法逻辑、直觉主义逻辑、时态逻辑、模

糊逻辑、内涵逻辑、模态逻辑、三值逻辑、非单调逻辑等等。在这些非标准逻辑中,有的已形成了较成熟的演绎系统和语义理论,有的尚处于初创阶段,还没有形成一个公认的科学体系。

命题逻辑和一阶谓词逻辑是数理逻辑中最成熟的部分,也是学习和研究各种非标准逻辑的基础,在计算机科学中的应用尤为广泛。因此,我们在本课程中只研究命题逻辑和一阶谓词逻辑。首先介绍这套符号化形式体系的制定,然后介绍它在命题逻辑推理理论中的应用,最后把它扩展到谓词逻辑的推理理论中去。

第一章 命题逻辑基本概念

数理逻辑研究的中心是推理,而推理的基本要素是命题,所以也称为命题逻辑。

要研究命题逻辑的符号化体系,需要从命题开始。

§ 1.1 命题及其符号化

§ 1.1.1 命题

自然语言将**命题**(statement, proposition)表述为具有确定真假意义的陈述句。若该语句意义为真,则称为**真命题**;若该语句意义为假,则称为**假命题**。命题总是具有一定的值,称为**真值**。真值只有真、假两种,分别记为 $T(1)$ 和 $F(0)$,即真命题的真值为 T 或 1 ,假命题的真值为 F 或 0 。

显然,判断一个语句是否为命题,有两个要点:

- 1) 是陈述句,不能是疑问句、祈使句,更不能是一个不完整的句子;
- 2) 或真或假,具有惟一真值,不能兼而有之。

例 1.1 判断下列语句是否为命题。

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------|
| (1) 你是谁? | (2) 雪是白的。 |
| (3) 明年的国庆日是晴天。 | (4) $95^2 + 95 + 1$ 。 |
| (5) $3 - x = 5$ 。 | (6) 北京交通真拥挤! |
| (7) 火星表面的温度是 800°C 。 | (8) 100 是个很大的数。 |
| (9) 我正在说谎。 | (10) 这是一朵美丽的花。 |

解 (1)是疑问句,不是陈述句,所以不是命题;(2)是真命题;(3)虽然现在谁也不知道该语句是真是假,但是到时候一定是清楚的,所以是命题;(4)不是一个完整的语句,所以不是命题;(5)虽然是陈述句,但其真值不惟一,随着 x 的取值而改变,所以不是命题;(6)是感叹句,不是陈述句,所以不是命题;(7)可能说不出其真假,但无论如何,它不是真就是假,真值是惟

一的,所以是命题;(8)由于含义不确切,所以不是命题;(9)是悖论(即既可由真推出假又可由假推出真的命题),如果他确实是在说谎,那么“我正在说谎”就是真的,于是他是在讲真话,没有说谎,那么“我正在说谎”又是假的,显然这是自相矛盾的,也就是说,对于陈述句“我正在说谎”,无法指定其真值,这正是所谓的“说谎者悖论”,所以不是命题。(10)类似(8)含义不确切,因为一些人认为其美丽,另一些人却不这样认为,所以不是命题。

由以上分析可知,判断一个陈述句是否为命题,关键在于判断其是否具有惟一真值,而与我们是否知道其真假无关。

上述所有是命题的陈述句,都是简单陈述句,不能再被分解为更简单的语句,这种由简单陈述句构成的命题称为简单命题,也称为原子命题或本原命题。命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构,所以简单命题是构成命题逻辑的最基本的部分。

在自然语言中,用联结词可以将若干个简单陈述句组合成复合陈述句。如“李兰聪明又好学”这句话,实际上是由联结词“又”将两个简单句“李兰聪明”和“李兰好学”复合而成的。这种由复合陈述句构成的命题称为复合命题(compound statements)。若把组成复合命题的简单命题称为支命题,则复合命题的真值由其支命题的真值和联结词的意义共同决定,当每个支命题的真值均已确定时,联结词将为复合命题指定惟一的真值。所以要想确定一个复合命题的真值,需要分析其支命题以及联结词。

§ 1.1.2 命题符号化

既然命题逻辑是一种符号化的逻辑演算,那么首先要作的是将有关的各种命题符号化,即用命题标识符表示命题。对于简单命题,一般用小写字母 p, q, r, s, t, \dots 表示,并将符号放在其表示的命题前,如:

p :今天下午有足球赛;

q :北京大学在海淀区。

简单命题的真值通常都是确定的,因此其相应的命题标识符称为命题常项。然而有时仅用命题标识符来表示简单命题的位置标志,如同在代数运算中不对任意的 x 给定确定的值一样,并没有指定其确定的真值,即其真值可能为真也可能为假,这样的命题标识符称为命题变项,通常也用小写字母 p, q, r, s, t, \dots 表示。一个标识符,例如 p ,到底表示的是命题常项还是命题变项,一般可由上、下文确定,不会发生混淆。

由于复合命题的真值由其支命题的真值和联结词的意义共同决定,所以复合命题的符号化要复杂些,需将所涉及的支命题和联结词分别符号化。符号化

的联结词称为**逻辑联结词**(logical connective)或**逻辑运算符**,是命题演算中的运算符。在代数式 $x+y$ 中, x 和 y 称为运算对象,+称为运算符, $x+y$ 则表示运算结果。类似地,在命题演算中,联结词是运算符,命题常项和命题变项则是运算对象。

下面将对几种常用的逻辑联结词及与之密切相关的复合命题作出明确定义并将其符号化。

1. 否定式和否定联结词

定义 1.1 命题 p 的非或否定,称为 p 的**否定式**(negation),记作 $\neg p$,读作“非 p ”。符号 \neg 称为**否定联结词**。若 p 的真值是T,则 $\neg p$ 的真值是F;若 p 的真值是F,则 $\neg p$ 的真值是T。

命题 p 及其否定 $\neg p$ 的真值关系见表 1.1,它指明了如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符的命题的真值。

表 1.1 否定联结词“ \neg ”的定义

p	$\neg p$
F	T
T	F

或

p	$\neg p$
0	1
1	0

可以看出, \neg 相当于汉语中的“不”。

- 例 1.2** (1) p :今天天气好; $\neg p$:今天天气不好。
 (2) $p:2+5>1$; $\neg p:2+5\leq 1$,此时 p 为真, $\neg p$ 为假。
 (3) p :所有的素数都是奇数; $\neg p$:并非所有的素数都是奇数。

注意,(3)中的 $\neg p$ 不能说成“所有的素数都不是奇数”。

严格地说, $\neg p$ 不是复合命题。 \neg 的运算对象只有一个,所以它是一元运算符。

2. 合取式和合取联结词

定义 1.2 p 且 q 称为 p, q 的**合取式**(conjunction),记作 $p \wedge q$,读作“ p 与 q ”。符号 \wedge 称为**合取联结词**。

合取联结词的真值关系见表 1.2。

表 1.2 合取联结词“ \wedge ”的定义

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

或

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1