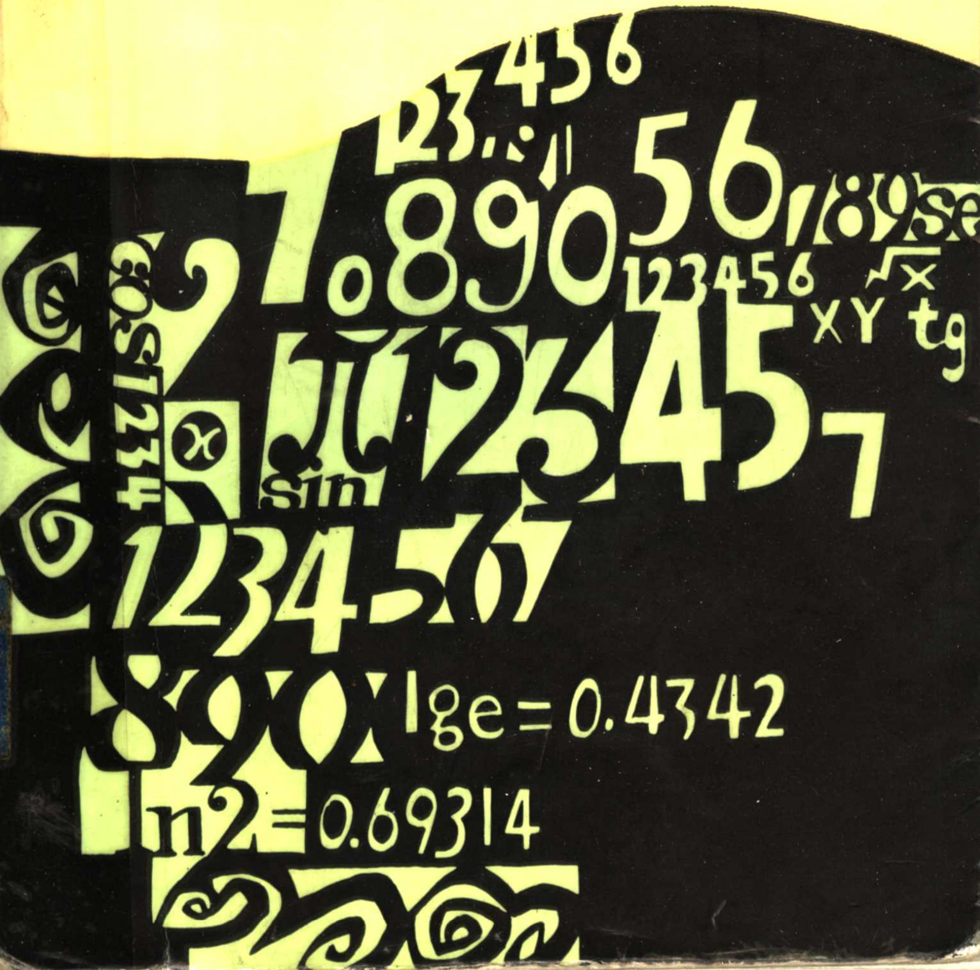
中学数学竞赛导引

ZHONGXUE SHUXUE
JINGSAI DAOYIN

上海教育出版社



中学数学竞赛导引

ZHONGXUE SHUXUE
JINGSAI DAO YIN

● 上海教育出版社

中学数学竞赛导引

常庚哲　魏有德　严镇军　等

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

各地新华书店　经销　　上海新华印刷厂印刷

开本850×1156　1/32　印张22.75　插页4　字数562,000

1993年3月第1版　1998年5月第5次印刷

印数　15141—18160本

ISBN7-5320-2854-2/G.2784　　定价：(软精) 22.50元

出版说明

我社为配合全国数学竞赛的开展，近10多年来在数学界专家和同行们的支持下，编辑、出版了不少数学课外读物，以激发学生对数学的学习兴趣，同时为数学竞赛提供了有益的资料，做了一些铺垫工作.

近年来，我国在IMO中取得了优异的成绩，并涌现了一批指导竞赛的专家和优秀教练员. 他们在实践中积累了丰富的经验和大量的资料. 为使我社的出版物进一步适应当前数学竞赛的需要，发展竞赛的丰硕成果，我们请常庚哲、魏有德、严镇军等10多位专家、教授、高级教练员撰写了本书. 谷超豪教授为本书欣然作序.

本书汇集了11个专题的内容，力图覆盖目前国际、国内竞赛所涉及的有关内容，使之成为数学竞赛的源和流.

本书不采用讲座形式，而写成独立成篇的小册子形式. 第一篇"抽屉原则"，是原作者在《抽屉原则及其他》一书基础上修订而成的，使竞赛的内容更集中，更典型；同时又保留原书的既讲内容，又讲数学思想，讲规律，讲技巧等特色. 其余10个专题都是作者按上述风格精心设计、编写的新作. 本书题材丰富，内容扎实，有较强的实践基础，使用方便.

希望本书能得到广大数学爱好者和竞赛参赛者的欢迎.

1992年2月

总　序

——兼谈数学能力的培养和发展

我国自1985年首次参加国际中学生数学奥林匹克竞赛以来，连年取得优异的成绩，共获得金牌20枚，银牌12枚，铜牌4枚，并两次获得团体总分第一．此事受到世界各国的重视．这表明，中国人有着高超的数学能力，中国存在着极为丰富的智力资源，也说明了中国的数学教育是很有成效的．

数学能力应该说是多方面的，我想至少要包括：

一、有比较全面的数学基础．对于高中学生来说，应该全面掌握初等数学的内容，并逐步了解高等数学的某些内容．

二、有灵活而严格的数学思维能力．这里既包括严格的逻辑推理的训练，又包括通过直观，掌握数学对象的本质，根据所学内容能“举一反三”地进行创造性思维（例如构思一些概念，提出一些问题和一定的预见能力）以及从具体到抽象和从抽象回到具体的能力，等等．逻辑推理的训练是很重要的，但它决不是数学思维的最主要的成分．

三、有熟练和机智的解题能力．数学就是要计算，要证明，要求解各种问题．既要能根据现成的、标准的方法熟练地解出相应的问题，又要锻练出足够的能力，用常规以外的、不易想到的办法去对付难题．

四、有用数学方法来解决应用问题的能力．对相关的学科如物理学、生物学、计算机和经济学等等应有足够的兴趣．

当然，对于不同的学生，这些要求的深度和广度是不甚相同

的.现在的青少年中总有一些人，将来会以数学的研究和教育为终生的事业的，其中有一部分人已立志要做数学家.在不同的学习阶段，都应该从高、从广来培养和发展上述的多方面的能力.

数学是各门科学的基础，大多数学生将来不会成为专业的数学工作者，但对他们来说，较高的数学能力，也完全是必要的.从事其他门类的科学技术工作，从事管理工作等等也都要求较高的数学能力.不少人的经验表明，适当地运用数学工具对于他们的工作是大有益处的.因而，数学能力的培养和发展对于全体学生来说都是十分必要的.我这里把培养和发展并列，这是因为：作为一个受教育者除了接受培养外，还要发挥自己的主动性、努力采取各种途径来发展自己的智力；而作为教师，则要尽量使学生有主动思考的自学能力.

从解题的竞赛中取得进步，这也是数学古来的传统.竞争意识是推动进步的一个因素，从古到今都有出难题征求解答或相互比试的盛举.不同层次的竞赛应有不同的目标和要求.有的竞赛以促进一般学生对基本内容的理解和熟练地解答一般性练习题为目的；有的竞赛要使参加者加深对学习内容的理解和加强解决较难问题的能力；有的竞赛则希望进一步激发出爱好数学的学生的数学才能和解决困难的潜力.有的竞赛完全可以结合平时的学习来进行，而有的竞赛只能挑选部分学生参加.对于高层次的竞赛，参加者一般还要经过特殊的培训，熟悉某些类型的问题，及它们的求解思路和方法.特别是对于那些远离教学基本内容而由专家们大费心机想出来的难题，如果事先没有一定准备，临时是很难对付的.

竞赛是以解题的方式进行的.但是，即使是参加高层次的竞赛，决不能把培训限于掌握解题的成法和技巧上，而是要着眼于数学能力的全面的提高.数学是思想性和技巧性都很强的科学，忽略了任何一面，都是难成大器的.比如说，平面几何的题目可以越做越多，越做越难，永无止境，技巧也层出不穷.但如果我们不及

早地使学生懂得变换的作用，不学习代数方法和分析方法，就不能实现初等数学到高等数学的过渡.

我还想强调，竞赛的成败不是考验数学水平的唯一标准. 可以说，成功者必然是经过长期艰苦努力，而且具有相当高的数学能力的. 反过来却未必. 没有被挑选参加竞赛或竞赛中没有得到成功的，并不表明数学能力(或潜在的能力)不行. 有的人可能更感兴趣于概念的理解和向高等数学的过渡，而对解题技巧方面还没有发展到适应高层次竞赛中解难题的要求，有的是对于难题的类型知道得不够多，或跟试题对不上号，其他还有许多偶然的因素。爱好数学的同学们如果遇到这种情形，千万不要灰心和自卑. 要充分认识到自己的优势和潜力，努力地发挥出来；同时也正视自己的不足之处，努力改正和补救. 学术上的奋斗是终生的事，起跑线上的不利情况是完全可以改观的.

最后，我还想表达一点希望. 当前，的确有许多社会因素使青年学生（或者他们的家长）较多地考虑将来的生活条件和物质待遇，这使得献身于学术的气氛不很浓厚，分明是有条件去攀登学术高峰的，却下不了决心. 同学们必须知道，国家的实力将最终决定于科学技术的水平. 面对着科技竞争的世界，面对着科技高度发展的未来，面对着振兴中华的历史重任，青年的一代是责无旁贷的. 每个同学都需要从社会主义建设的全局需要出发，根据自己的实际情况，确定自己的志向. 欢迎对数学有才能和有兴趣的同学投身到振兴我国数学的事业中来.

谷超豪

1992年2月18日

总 目 录

第 一 篇　抽屉原则 ……………………………常庚哲　(1)
第 二 篇　整数 ………………………………魏有德　(69)
第 三 篇　多项式 ……………………………严镇军　(155)
第 四 篇　不等式 ……………………………严镇军　(195)
第 五 篇　函数方程 …………………………张景中　(297)
第 六 篇　极值问题 …………………………李成章　(347)
第 七 篇　计数 ………………………………李炯生　(413)
第 八 篇　图论……………………………熊　斌、李大元　(493)
第 九 篇　集合分划与整数分拆 ……………吴建平　(583)
第 十 篇　几何 ………………………………蒋　声　(615)
第十一篇　组合几何 …………………………余红兵　(663)

第一篇

抽屉原则

中国科学技术大学　常庚哲

目　录

前言
一、第一堂算术课 ……………………………………………5
二、抽屉原则 …………………………………………………6
三、简单例子 …………………………………………………8
四、艾尔多士定理……………………………………………17
五、剩余类……………………………………………………21
六、平均值原则………………………………………………31
七、用有理数去逼近无理数…………………………………36
八、面积的重叠原则…………………………………………43
九、国际数学奥林匹克的几个赛题…………………………49
十、正方形的分解……………………………………………59

前　言

“把 $n+1$ 个或者更多的物体放到 n 个集合之中，那么，至少有一个集合里要放进两个或者更多的物体”，这就是抽屉原则的最简单的形式．抽屉原则又叫重叠原则，虽然它的正确性十分明显，很容易被不具备多少数学知识的人所接受，但是，加以灵活运用，可能得到一些意想不到的结果．各种形式的抽屉原则，在初等数学乃至高等数学中，经常地被采用着．

1978 年 4 月，在全国部分省市中学生数学竞赛举行的前夕，作者曾以《抽屉原则》为题，在安徽省几个城市对中学生作过讲演．在当时讲稿的基础上，我写作了题为《抽屉原则及其他》的小册子，于 1978 年 12 月由上海教育出版社出版，到现在十多年已经过去，该书已多次重印．由于当时所搜集到的直接与抽屉原则有关的数学竞赛题目不够多，我不得不写上了“不定方程”、“佩尔方程”这两节，若不这样做，内容显得太单薄了．在“不定方程”这一节中，几乎同抽屉原则不发生关系；讨论“佩尔方程”时虽然要用到抽屉原则，但由于这一部分内容过于专门，证明又十分冗长，中学生很少有耐心读下去．这十年来，在国内外的数学竞赛中，与抽屉原则有关的赛题频繁地出现，这样就使得有必要也有可能来改写这一本小册子，去掉那些不恰当的内容，增添许多新的题目，使之与中学生数学竞赛的要求更为接近．我认为，把这一篇的名称直接改为《抽屉原则》是适当的，因为现在，本篇的内容已处处紧扣着抽屉原则，其中没有任何深奥的理论，一切都让“例题”来说明问题，为的是让中学生感到它的“可读性”．也正是由于这一想法，我们只讨

论了最简单的抽屉原则，并没有把它引申到"拉姆赛定理"或者"图论"上去.

我在写作的过程中，丝毫没有创造性的工作. 但是，搜集例题和习题并且把它们组织起来，并不是一件轻松的工作. 写作本篇时，我参考过好几篇国内外发表过的有关抽屉原则的文章，从中选取了不少例子. 特别应当提到的是齐东旭教授所写的《鸽巢原理》一文（见《中学数学竞赛专题辅导》第一辑，吉林教育出版社，1987年8月），其中的例题和习题以及某些观点的陈述我都非常感兴趣.

作 者

1989年6月25日

一、第一堂算术课

新学年开始了.

开学的那一天，红星小学一年级一班第一堂就是算术课. 任课的张老师，是一位很有经验、很有水平的老教师. 她讲课深入浅出，活泼生动，凡是长期听张老师讲课的同学，总是不知不觉地对数学发生了浓厚的兴趣.

张老师走进课堂，全班同学起立，向这位辛勤的园丁致敬. 环视那几十张陌生而可爱的小脸，张老师心里充满了无限的喜悦. 她用简单而诚挚的语言向新同学表示祝贺和欢迎，接着说道："我校今年招收了三百七十名一年级新生，他们都年满六岁但还不到七岁. 我说呀，这么多的新同学中间，一定有两个人是同年、同月、同日出生的. 小同学们，你们说对不对？"

对于这个新奇的结论，大家感到有趣而又惊讶. 同学们低声地互相议论起来了.

"张老师知道我们每一个人的生日了吗？"

"不会的. 她今天同我们才头一次见面，连我们的名字恐怕都叫不上来."

"……"

"张老师一定查看过我们的报名登记表了！"

这一句话恰巧被张老师听见了，她笑着说："我没有看过你们的登记表，而且，完全不必要看这些表，就可以得出这个结论."

同学们更惊奇了！

张老师接着说："同学们想想看，把十只苹果放到九个抽屉中

去，无论怎么放，这九个抽屉中一定有一个抽屉里放了两只或两只以上的苹果．你们说对吗？”

“对！对！”同学们齐声回答．小朋友所具备的常识，就足以使他们明白：要是每个抽屉中最多只有一只苹果的话，那么九个抽屉至多才装着九个苹果．

“好！我们把一年中的三百六十五天(闰年三百六十六天)的每一天，看成一个“抽屉”，而把三百七十个新同学中的每一个人看成一只“苹果”，按照“苹果”出生的日子，把他们放到对应的“抽屉”中去．由于“苹果”数目多于“抽屉”数目，就能知道：一定有一个“抽屉”中至少放着两只“苹果”．这就是说，至少有两个同学的生日相同．再根据同学们的年龄的差别不超过一岁，所以，这两个同学一定是同年、同月、同日出生的了．”

小朋友们恍然大悟，会心地微笑了．

二、抽屉原则

运用第一节中采用过的推理方法，我们还可以证明如下的更加令人惊讶的结论．

根据常识，一个人的头发的根数不会超过二十万．因此，在一个拥有二十多万人口的城市中，一定有那么两个人，他们的头发的根数相同．

推理方法如下：我们设置二十万零一个“抽屉”，并且对每一个“抽屉”依次标上从0，1，2，3，…直到200000之中的一个号码．按各人头上头发的根数归入相应的一个“抽屉”，比如说，如果张乐平先生画的三毛生活在这个城市，那么他就被归为标有号码“3”的那个“抽屉”；我们没有理由排除这个城市中有留着光头的人，所以必须设置“0”号“抽屉”．由于人的数目多于“抽屉”的数目，可以断

定，一定至少有两个人与同一“抽屉”相对应，这两个人自然就有同样多根头发了.

容易看到，这从本质上来说，仍然是前节中“十只苹果”和“九个抽屉”的推理方法. 这种推理的正确性，“显然”到了连小学一年级的学生也能完全接受. 如果把这种推理推广到更加一般的形式，其正确性也完全可以被不具备多少数学知识的人所认识.

怎样把这种推理推广到一般形式呢？我们来注意以下两点：

1. 如果将“苹果”换成“皮球”、“铅笔”或“数”，同时将“抽屉”相应地换成“袋子”、“文具盒”或“数的集合”，那么仍旧可以得出相同的结论.

这就是说：推理的正确性与具体的对象没有关系. 我们把一切可以同“苹果”互换的对象称之为“元素”，而把一切可以同“抽屉”互换的对象称之为“集合”，从而得知：十个元素以任意的方式归入九个集合之中，那么其中一定有一个集合中至少包含两个元素.

2. “苹果”和“抽屉”的具体数目是无关紧要的，只要苹果(元素)的个数比抽屉(集合)的个数多，那么推理照样成立.

于是，我们就可以把“十只苹果”和“九个抽屉”的推理方法，推广到下述一般形式：$n+1$

原则一 把多于 $\cancel{n}$ 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素.

原则一还有以下更加一般的形式：

原则二 把多于 $m\times n$ 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中含有 $m+1$ 个或 $m+1$ 个以上的元素.

这是很明显的，因为若每个集合中所含元素的数目均不超过 m，那么这 n 个集合所含元素个数就不会超过 $m\times n$.

原则三 把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合，那么至少有一个集合中仍含无穷多个元素.

这也是很显然的，这是因为，如果每个集合中只含有穷多个元素，那么有穷个集合只能包含有穷个元素.

以上三个原则都称为**抽屉原则**. 看上去，它们都是非常简单的. 可是，正是这样一些很简单的原则，在初等数学乃至高等数学中，有着许多应用. 巧妙地运用这些原则，可以很顺利地解决一些看上去相当复杂、甚至觉得简直无从下手的数学题目.

三、简 单 例 子

在本节，我们运用抽屉原则，来证明初等数学中的一些题目.

[**例 1**] 在边长为 1 的正方形内任意放置五个点，求证：其中必有两点，这两点之间的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

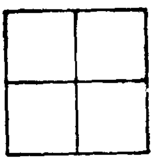


图 1-1

证明 将这个正方形的两对对边上的中点连接起来，把它分成四个大小相等的小正方形(图 1-1). 在大正方形里任放五个点，就相当于把五个点以任一确定的方式投放在这四个小正方形中. 这里，我们把每一个小正方形看成一个"抽屉"，于是问题就归结为把五个元素(点)放入四个"抽屉"(小正方形). 根据前节的原则一，必有一个小正方形，其中包含两个或两个以上的点，对于其中的两点，它们间的距离不会超过小正方形对角线的长度 (即大正方形对角线长度的一半)，即不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[**例 2**] 空间中有六个点，其中任何三点都不共线，任何四点都不共面. 在每两点之间连起直线段之后，将每一条这样的线段或涂上红色，或涂上蓝色. 求证：不论如何涂色，一定存在一个三角形，它的三边有相同的颜色.

证明 从任一点出发，到其余五个点，共可连五条线段．由于这五条线段已被红、蓝两种颜色所涂染，如果把红线段分入一个“抽屉”，蓝线段分入另一个“抽屉”，于是问题就归结为五个元素（线段），即多于 2×2 个元素，分到 2 个“抽屉”（蓝色或红色），按照原则二，其中至少有三条线段被分入同一“抽屉”，即染有相同的颜色，例如说是红色（图 1-2 中的实线）．我们来考察这三条由同一点出发，具有相同颜色的线段，把这三条线段的另外三个端点两两连接起来，就构成了图 1-2 所示的虚线三角形．如果有一条虚线被涂成红色，那么它就与两条实线组成一个红边三角形；如果这三条虚线中一条红边也没有，那么它们本身就组成一个蓝边三角形了．

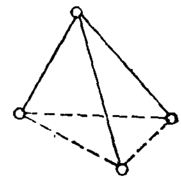


图 1-2

[例 3] 在边长为 1 的正方形中，任意放入 9 个点，证明：在以这些点为顶点的许许多多三角形中，必有一个三角形，它的面积不超过 $\frac{1}{8}$．（1963 年北京市数学竞赛试题）

证明 用三条平行于上下底边的直线，把正方形分成四个大小相等的长方形．九个点任意放入这四个长方形中，根据原则二，即多于 2×4 个点放入四个长方形中，则至少有 $2+1$ 个点（即三个点）落在某一个长方形之内．现在，特别取出这个长方形来加以讨论（图 1-3）．

把落在这长方形中的三点记为 A、B、C，通过这三点分别作平行于底边的直线．由图 1-3 显然可见

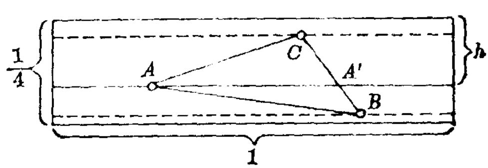


图 1-3