财政部“十五”规划教材
全国中等职业学校财经类教材

经济数学基础

（第三版）（下册）

何屏生　主编

中国财政经济出版社

财政部“十五”规划教材

全国中等职业学校财经类教材

经济数学基础

（第三版）

下册

何屏生 主编

陈玉祥 副主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础．下册／何屏生主编．—北京：中国财政经济出版社，2003.7

财政部“十五”规划教材．全国中等职业学校财经类教材

ISBN 7－5005－6572－0

Ⅰ．经... Ⅱ．何... Ⅲ．经济数学－专业学校－教材 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 045607 号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www.cfeph.com.cn

E－mail：cfeph @ drc.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436

北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销

850×1168 毫米　32 开　16.625 印张　387 000 字

2003 年 8 月第 3 版　2003 年 8 月北京第 1 次印刷

印数：1— 3 060　定价：27.00 元（上、下册）

ISBN 7－5005－6572－0/F·5734

（图书出现印装问题，本社负责调换）

编审说明

本书是全国财经类通用教材。经审阅，我们同意作为全国中等职业学校财经类教材出版。书中不足之处，请读者批评指正。

财政部教材编审委员会

2003年3月

前　言

本书是财政部“十五”规划教材。

按照《财政部“十五”教材建设规划》的安排，根据教育部《关于全面推进素质教育、深化中等职业教育教学改革的意见》、《全国中等职业教育会计专业整体教学改革方案》，以及教育部2000年8月颁发的《中等职业学校数学教学大纲（试行）》的精神与要求，在财政部干部教育中心教材处的指导下，我们编写了中等职业学校教材《经济数学基础》，供财经类中等职业学校数学课教学使用。

本教材以中等职业教育的培养目标为依据，从学生初中毕业的实际出发，结合财经类中等职业学校教学内容的要求，贯彻“以全面素质为基础，以能力为本位”的指导思想，确定教材内容的原则为：“加强基础、注重能力、联系应用、增大弹性、适度拓宽、兼顾体系”。具体说有三个特点：(1) 突出数学课作为一门基础课教材的基础性。通过本教材的学习，让学生的数学基础从初中毕业的水平提高一步，以适应中等财经类各专业课学习的需要及进一步学习经济数学的更深知识的需要。(2) 突出中等职业教育层次的适度性。在内容上，特别是对于涉及经济应用方面的知识点，仅作初步的联系及介绍，以区别于较高层次的同类教材，从而控制了教材的难度。(3) 突出经济数学的专业性。教材以适应经济管理及财经类各专业的需求为方向，在内容的取舍上，与普通高级中学的数学课程相比，未编入“向量、立体几

何”等与经济应用关系不太密切的内容，补充了经济应用方面的内容。

本教材共十五章，分为上、下两册：

上册（前九章）为基础部分，包括集合、不等式、函数的概念、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、初等函数、数列、排列、组合、直线及二次曲线等内容。

下册（后六章）为拓宽部分，包括一元微积分初步、概率初步与统计初步等内容。

各类学校在使用本教材时，应充分保障前九章内容的教学时数，在此基础上，再按不同专业的需求选择使用后六章内容的适当章节；高中毕业为起点的学生，可选学或不学前九章的内容。

本教材由云南省财经学校何屏生担任主编，连云港财经学校陈玉祥担任副主编。参加编写的有秦皇岛职业技术学院丘庆芸(第六、七、八、九章)、武汉财政学校张勇（第四、五章)、内蒙古财政学校魏运（第一、二、三章)；何屏生（第十、十一、十二、十三章)，陈玉祥（第十四、十五章)。全书由何屏生老师总纂。

本教材于2002年7月经财政部教材审稿会（威海）审定通过，由湖南财专刘应辉副教授负责主审。

本教材编写中，得到财政部干部教育中心教材处的关怀与指导，并得到了各参编学校及云南大学出版社与云南光正图书有限公司的大力支持，在此一并致谢。

因编者水平有限，不足之处请予以指正。

编　者

2003年3月

目　　录

第十章

极限与连续

教学目的与要求

学习本章,要求理解函数极限的概念、无穷小量及无穷大量的概念;掌握函数极限的运算方法及运算性质;理解函数连续的概念及连续函数的性质,会求一般的间断点及函数的连续区间,掌握无穷小量的比较方法.

极限是微积分学最基本的概念,极限的方法是微积分学的一个基本的研究方法,极限性和连续性是函数的两个最重要的基本性质,掌握本章内容是学习微积分学的重要基础.

本章先学习函数极限的概念及相关的运算方法、运算性质,然后学习函数的连续性及连续函数的性质.

§10－1　极限的概念

一、数列的极限

观察下面五个数列:

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots;$

(2) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}: \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots;$

(3) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}^n: -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots, (-\frac{1}{2})^n, \cdots;$

(4) $\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots;$

(5) $\{2n\}: 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots.$

比较可见，其中数列(1)、(2)和(3)与数列(4)、(5)表现了两种不同的规律：

数列(1)随着项数的不断增加，各项的数值逐渐地趋近于一个确定的数值：0，而且随着项数 n 的无限增大，数列将无限地趋近于这个数值；

数列(2)和(3)也呈现了同样的规律，不同的是，随项数 n 的增大，它们无限接近的目标值不同；数列(2)无限趋近的数值为1；而数列(3)无限趋近的数值为0，而且，数列(2)与数列(1)相类似，各数列是在逐渐变小之中分别无限趋近于0和1；而数列(3)则是在正、负值之间相间的变化之中无限趋近于0的.

相反的是，数列(4)和(5)却不具备上述规律；当 n 无限增大时，数列(4)的数值只是反复地在1与 -1 之间互变；而数列(5)却变得越来越大乃至趋近于正无穷大.

一般地，我们认为类似数列(1)、(2)和(3)这样的情况，数列是有极限的，并且称数列随 n 的增大而无限趋近的这一目标为它的极限.

下面给出数列极限的描述性定义：

定义10－1 若数列 $\{a_n\}$ 当 n 无限增大时无限地趋近于常数 A，则称数列当 n 趋于无穷的极限为 A，可记为：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或

$a_n \xrightarrow{n \to \infty} A$.

注意,在上述定义中,"无限趋近"这四个字包含了两层意义:"趋近"说明当 n 增大时,a_n 的变化趋势,是逐渐接近常数 A,而不是逐渐远离常数 A 或是时近时远;而"无限"则说明 $\{a_n\}$ 在趋近于 A 的过程中可以接近的程度,仅当 $\{a_n\}$ 可以无限接近于 A 时,才能断定 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限,若 a_n 虽逐渐接近 A,但始终与 A 保持一定的距离,即不能无限接近 A,则 A 就不能确定为 $\{a_n\}$ 的极限.

例如,前述的数列(2),当 n 无限增大时,数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的数值在逐渐地减小,即在逐渐地接近于数值 1,且同时也在逐渐接近 0;但在它逐渐减小着逐渐接近的这两个目标中,$\{a_n\}$ 与 1 可以无限地接近;而与 0 却不能无限接近(因 a_n 与 0 至少还差 1 个单位不可接近),所以,当 n 无限增大时,数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的极限是 1 而不是 0.

二、函数的极限

对于函数 $y = f(x)$,当 y 随 x 而改变时,自变量 x 的变化方式就不似数列 $\{a_n\}$ 中 n 的变化那么简单了:n 只能取正整数,且随数列的展开,n 只能趋于无限大;而 $f(x)$ 中 x 的变化则可以有多种方式.现在我们就按以下两种确定的 x 的变化方式来研究函数 $y = f(x)$ 的极限规律:

(一) $x \to \infty$ 时,$y = f(x)$ 的极限

定义 10_2 若 $x \to \infty$ 时,$f(x)$ 无限接近于常数 A,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 的极限,记为:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \xrightarrow{x \to \infty} A.$$

说明:$x \to \infty$ 包含 $x > 0$,且 $x \to +\infty$ 或 $x < 0$,且 $x \to -\infty$,

若仅当 x 按其中一种趋势变化时，就不能记为 $x\to\infty$，而只能明确记为：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

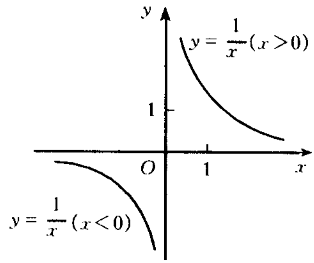

图 10－1

例 10－1　确定函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 的极限.

解：∵ 当 $x\to-\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0；

且当 $x\to+\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0.

∴ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，如图 10－1 所示.

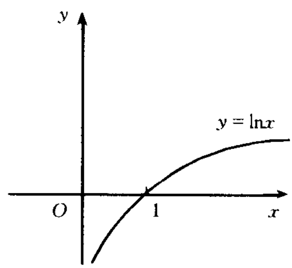

图 10－2

例 10－2　讨论函数 $y=lnx$，当 $x\to+\infty$ 的极限.

解：∵ 当 $x\to+\infty$ 时，$y=lnx$ 趋于 $+\infty$，

∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}lnx$ 不存在，如图 10－2 所示.

例 10－3　讨论函数 $y=\sin x$ 当 $x\to\infty$ 的极限.

解：∵ 当 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 时，$y=\sin x$ 周期性地在 $[-1,1]$ 之间变化，不可能无限趋近于某个常数 A.

∴ $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

除 $x\to\infty$ 这一特殊变化规律外，通常我们将讨论自变量 x 趋近于某一定值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 的极限规律.

（二）　$x\to x_0$ 时，$y=f(x)$ 的极限

定义 10＿3　若 $x\to x_0$ 时，$y=f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

$$或\ f(x) \xrightarrow{x \to x_0} A.$$

说明：$x \to x_0$ 包含 $x < x_0$ 且 $x \to x_0$，一般记为 $x \to x_0^-$，及 $x > x_0$ 且 $x \to x_0$，一般记为 $x \to x_0^+$；若仅为其中一种条件，不能记为 $x \to x_0$，对此，后面在“单侧极限”一段中将详细另行讨论.

例 10－4　讨论函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 当 $x \to 0$ 时的极限.

解：$\because$ 当 $x < 0$ 且 $x \to 0$ 时，$y = \dfrac{1}{x} \to -\infty$；

而当 $x > 0$ 且 $x \to 0$ 时，$y = \dfrac{1}{x} \to +\infty$.

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ 不存在，如图 10－1 所示.

例 10－5　确定函数 $y = lnx$ 当 $x \to 1$ 时的极限.

解：$\because$ 当 $x < 1$，$x \to 1$ 时，$y = lnx$ 无限接近 0；

且当 $x > 1$，$x \to 1$ 时，$y = lnx$ 无限接近 0.

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 0$，如图 10－2 所示.

例 10－6　讨论函数 $y = lnx$ 当 $x \to 0^+$ 时的极限

解：$\because$ 当 $x > 0$ 且 $x \to 0$ 时，$y = lnx \to -\infty$，

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^+} lnx$ 不存在，如图 10－2 所示.

例 10－7　讨论函数 $y = \cos x$ 当 $x \to 0$ 时的极限

解：$\because$ 当 $x < 0$ 且 $x \to 0$ 时，$y = \cos x$ 无限趋近于 1；

且当 $x > 0$ 且

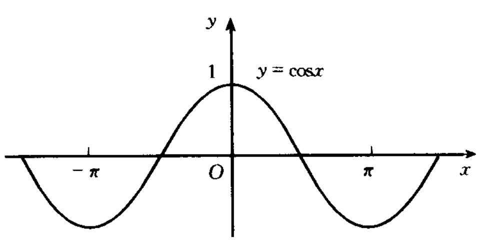

图 10－3

$x \to 0$ 时，$y = \cos x$ 无限趋近于 1，

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$，如图 10 - 3 所示.

（三）函数的单侧极限

对于 $x \to x_0$ 时 $y = f(x)$ 的极限，我们按 $x \to x_0^-$ 与 $x \to x_0^+$ 的不同而分别称为函数的左极限和右极限，总称函数的单侧极限.

定义 10 _ 4 若 $x < x_0$ 且 $x \to x_0$ 时 $y = f(x)$ 有极限 A，则称 A 为 $y = f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记为：

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A,$$

$$\text{或 } f(x) \xrightarrow{x \to x_0^-} A.$$

定义 10 _ 5 若 $x > x_0$ 且 $x \to x_0$ 时 $y = f(x)$ 有极限 B，则称 B 为 $y = f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记为：

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = B, \text{或 } f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+} B.$$

例 10 - 8 讨论函数 $y = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \leqslant 0 \end{cases}$，当 $x \to 0^-$ 及 $x \to 0^+$ 的极限规律.

解：$\because$ 当 $x < 0$ 且 $x \to 0$ 时，$y = f(x)$ 无限趋近于 0，

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$；即 $x \to 0$ 时 $y = f(x)$ 的左极限为 0.

$\because$ 当 $x > 0$ 且 $x \to 0$ 时，$y = f(x)$ 无限趋近于 1，

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$，即 $x \to 0$ 时 $y = f(x)$ 的右极限为 1；如图 10 - 4 所示.

（四） $x \to x_0$ 时，$y = f(x)$ 极限存在的充分必要条件

定理 10 _ 1 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 及 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = B$；且 $A = B$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在且等于 A（即 B）.

此定理的证明略，且其逆定理成立.

例 10－9　讨论例 10－8 中的函数 $y=f(x)$ 当 $x\to0$ 时及 $x\to1$ 时的极限规律.

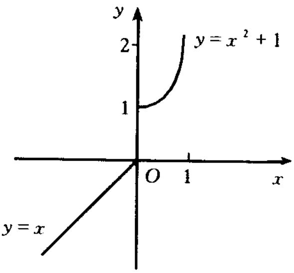

图 10－4

解：∵ 由例 10－8 得：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$；

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}f(x)$ 极限不存在.

$\because\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$ 且 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$，

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=2$，如图 10－4 所示.

例 10－10　确定函数 $y=c$ 当 $x\to x_0$ 的极限（$x_0\in R$）.

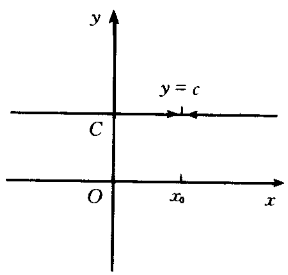

图 10－5

解：$\because\ \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}c=c$；

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}c=c$，

$\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0}c=c$，如图 10－5 所示.

例 10－11　确定函数 $y=x$ 当 $x\to x_0$ 时的极限（$x_0\in R$）.

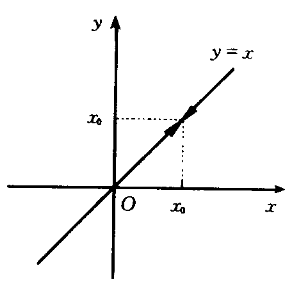

图 10－6

解：$\because\ \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}x=x_0$；

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}x=x_0$，

$\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，如图 10－6 所示.

例 10－10 和例 10－11 的结论，在本书以后的计算中将经常被用到.

§10－2　无穷小量与无穷大量

本节将讨论具有两种不同特殊规律的变量.

一、无穷小量

1. **定义 10－6**　极限为零的变量称为无穷小量.

例 10－12　$\because \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$,

$\therefore y = \frac{1}{x}$ 是 $x \to \infty$ 的无穷小量;

$\because \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$,

$\therefore y = \frac{1}{x^2}$ 也是 $x \to \infty$ 的无穷小量;

$\because \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$,

$\therefore y = \sin x$ 是 $x \to 0$ 的无穷小量;

$\because \lim\limits_{x \to 0} x = 0$,

$\therefore y = x$ 也是 $x \to 0$ 的无穷小量.

注意:某一变量称为无穷小量,必定是有一定条件的,即它以零为极限的条件;仅有一个特殊的无穷小量在任何条件下均称为无穷小量,这就是常数 0. 因为零既是一个特殊的变量,又在任何条件下均以零为极限,所以称“0 是一个特殊的无穷小量”.

2. 无穷小量有以下运算性质:

(1) 有限个无穷小量的和或差仍是无穷小量;

(2) 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量;

(3) 常量与无穷小量的乘积是无穷小量;