成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

苏步青题

工程数学

（二）

刘维翰
胡长华 主编
仲崇彬

广西科学技术出社版

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

工 程 数 学

（二）

刘维翰 胡长华 仲崇彬 主编

张旭辉 主审

广西科学技术出版社

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

工程数学（二）

刘维翰　胡长华　仲崇彬　　主编

张旭辉　　主审

广西科技出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行

广西大学印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　　印张11.25　　字数237,000

1988年7月第1版　　1988年7月第1次印刷

印数：1—8653册

ISBN　7-80565-003-9
O·1

定价：3.00元

序

为了帮助成人高校学生及广大业余自学者学好高等数学，进一步提高成人数学教学质量，在交流总结各地电大数学辅导课成功经验的基础上，精选各地辅导课的最佳教案，按照成人教育各科教学大纲的要求，加工整理汇编成一套系统的《电大数学辅导课教案精选》丛书。本丛书目前共分“高等数学”（上、下），“微积分”（上、下），工科用的“工程数学”（一、二），经济类用的“数理统计”及“线性代数与线性规划”等八册。每册包含教案约20个，每一教案详细介绍教学目的、教材重点、教学难点的处理，范例分析、巩固练习题、小结、课外思考题、预习内容等。各章之后附教学意见，分别阐明学习本章所需之基础知识，教学与学习注意事项，可供选择的讲授例题，复习套题及期末复习自测题，考虑周到，论述详尽。集中体现了中央电大和全国二十余省、市、自治区许多优秀数学教师的教学经验与辛勤劳动之硕果，实为一套不可多得的教学参考书与自学指导书。本丛书的出版，必将大大有益于成人数学的执教者和广大业余的自学者，深刻理解有关课程的内容与方法，有力地促进我国成人教育发展和提高。值此丛书付梓前夕，乐为推荐如上。

上海师范大学数学系教授

应　制　夷

一九八七年七月

目　录

第一章　数据的简单分析

教 案 一

李立忠（上海）

王可宪（青岛）

课题　数据的简单分析.

教学目的　(1) 使学员理解均值、中位数、众数、方差、标准差、极差、变异系数等概念；

(2) 使学员能熟练掌握均值、方差的简单计算方法；

(3) 熟悉如下公式：

① $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$（$\bar{x}$为均值）

② 任给一个常数 c，有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-c)^2$$

（此公式称为平方和分解公式）

③ 若 $y_i=x_i-a$（$i=1,2,3,\cdots,n$），则

$$\bar{y}=\bar{x}-a,\quad \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

④ 若 $y_i=bx_i$（$i=1,2,3,\cdots,n$），则

$$\bar{y}=b\bar{x},\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=b^{-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

4. 了解加权平均数、直方图的概念。

重点　均值、方差、平方和分解公式。

教学过程

一、电视课内容归纳

1. 平均值

数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的均值，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

有关均值的五个常用公式：

(1) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$

(2) 任给常数 c，有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-c)^2$$

特别取 $c=0$ 时，有 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n(\bar{x})^2$

(3) 若 $y_i=x_i-a\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，则

$$\bar{y}=\bar{x}-a,\ 且\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

(4) 若 $y_i = bx_i$ ($i = 1,2,\cdots,n$) ，则

$$\bar{y} = b\bar{x}，且 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

(5) 若 $y_i = bx_i - a$ ($i = 1,2,\cdots,n$) ，则

$\bar{y} = b\bar{x} - a$ 且

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

上述公式(2)一般称为平方和分解公式，以后经常用到。

2. 加权平均数

对一组数据 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 以及满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ 的一组正数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ ，称 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$ 为数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的加权平均数，并称 p_i 为 x_i 的权 ($i = 1,2,\cdots,n$)。

3. 方差、标准差、极差、变异系数

一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，称$S^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ 为其方差；称 $S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ 为其标准差，称$R = \max\limits_{1<i<n}(x_i) - \min\limits_{1<i<n}(x_i)$ 为其极差；称 $S/|\bar{x}|$ 为其变异系数。

上述数据的方差、标准差、极差、变异系数都反映了该组数据的分散情况。

4. 方差的简化计算公式

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$$

5. 直方图

对于给定的一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$（一般 n 较大），我们作出直方图，可以直观地了解该组数据的分布情况。作直方图的步骤如下：

（1） 找出 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 中最大的数 $b^*=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i)$ 和最小的数 $a^*=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i)$，计算出极差 $R=b^*-a^*$。

（2） 确定分组的组数和组距。当数据比较多时，组数可多些，通常分成10～20个组。当数据少于50个时，可分成5～8组。数据太少不宜作直方图，一般按等分分组，各组组距相同。

（3） 确定分点。为了避免给定的数据正好在相邻两组的分界点上，可取分点的数值比给定数据精度高一位，例如组数为 m，分点为 $t_0,t_1,\cdots,t_m$，有 $t_0<a^*<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<b^*<t_m$，于是得到 m 个小区间：$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{m-1},t_m]$.

（4） 计算出数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 落在各个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 中的个数 n_i——称为频数。

(5) 以各个小区间$[t_{i-1},t_i]$在数轴上的对应线段为底，相应频数n_i为高,画出m个小矩形，这就是频数直方图。若以$\frac{n_i}{n}/t_i-t_{i-1}$为高,以区间$[t_{i-1},t_i]$所在线段为底作出的$m$个小矩形，就称为频率直方图。在数据很多，分组很细的极限情况下，图的上方是一条曲线，该曲线正是后面将要介绍的随机变量的密度函数曲线。

6. 中位数、众数

(1) 中位数：一组数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$，从小到大排列设为$x'_1<x'_2<x'_3<\cdots<x'_n$。当$n$为奇数时，居中的那个数称为中位数；当$n$为偶数时，居中的两个数的算术平均值称为中位数。

(2) 众数：给出一组数据，可以作出相应的直方图，图中频数最大的那一个组的组中值称为众数。一般众数比中位数更接近于该组数据的均值。

二、例题分析

例1 试叙述以下5个公式的具体含意。并将其推广到加权形式。

(1) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$

(2) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-c)^2$

(3) 若$y_i=x_i-a$，则$\bar{y}=\bar{x}-a$，

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

(4) 若 $y_i=bx_i$，则 $\bar{y}=b\bar{x}$，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

(5) 若$y_i=bx_i-a$，则$\bar{y}=b\bar{x}-a$，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

公式(1)表明：任何一组数据，其各个数与它们的均值之差的代数和为零。

公式(2)表明：任何一组数据对于任意常数c的偏差平方和可以分解为两项，第一项是该组数据对其均值的偏差平方和，第二项是均值与常数之差的平方的n倍。

公式(3)表明：一组数据在数轴上左、右移动某常数$|a|$，其均值也作相对的移动，即$\bar{y}=\bar{x}-a$，该组数据的分散情况不因整组数据的左、右平移而变化，即数据对于其均值的偏差平方和不变：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$

公式(4)表明：数据y_i是x_i按相似比b作相似变换而得的，则它们的均值$\bar{y}$与$\bar{x}$仍然保持同样的相似比，而相对自己均值的偏差平方和之比应为相似比的平方b^2，即为

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

公式(5)表明：同时进行相似变换与平移后，数据均值，以及它们离散程度之间的关系，即公式(5)是综合公式(3)与

(4)的内容。

下面把上述5个公式推广到加权形式。

公式(1)加权形式为： $\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x})=0$

公式(2)加权形式为： $\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-c)^2$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x})^2+(\bar{x}-c)^2$$

公式(3)加权形式为：若 $y_i=x_i-a$（$i=1,2,\cdots,n$），则

$$\bar{y}=\bar{x}-a,\ \sum_{i=1}^{n} p_i(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x})^2$$

公式(4)加权形式为：若 $y_i=bx_i$（$i=1,2,\cdots,n$），则

$$\bar{y}=b\bar{x},\quad \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(y_i-\bar{y})^2$$

公式(5)加权形式为：若 $y_i=bx_i-a$（$i=1,2,\cdots,n$），则

$$\bar{y}=b\bar{x}-a,\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(y_i-\bar{y})^2$$

这里 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} p_ix_i$，$\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} p_iy_i$，$p_i>0$，$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$。

例2　对飞机的飞行速度进行15次试验，测得飞机的最大飞行速度（米/秒）如下：

422.2	418.7	425.6	420.3	425.8
423.1	431.5	428.2	438.3	434.0
412.3	417.2	413.5	441.3	423.7

试求这批数据的中位数、极差、均值、标准差及变异系数。

解 (1) 把上述数据从小到大进行排列，发现居中的数是 423.7 即中位数为 423.7。

(2) $R=441.3-412.3=29$，极差为29。

(3) 均值的计算用简化计算法：

设原有数据为 x_i，$y_i=10(x_i-420)$，则新数据 y_i 为下面的数据：

22，−13，56，3，58，31，115，82，183，140，−77，−28，−65，213，37。

这里取 x_i-420，目的是尽量使数据的绝对值变得小些，而420是与该组数据的中位数423.7最接近的比较整齐的数。将 x_i-420 乘以 10，是为将小数的计算转化为整数计算，较便利。

于是
$$\bar{y}=\frac{1}{15}(22-13+56+3+58+31+115+82+183+140-77-28-65+213+37)$$
$$=\frac{757}{15}=50.47$$

由上述例1中公式(5)可得

$$\bar{x}=\frac{\bar{y}}{10}+420=425.05$$

(4) 方差、标准差计算也用前例公式

$$S^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{10^2}\sum_{i=1}^{15}(y_i-\bar{y})^2$$

$$=\frac{1}{1500}\left(\sum_{i=1}^{15}y_i^2-15\bar{y}^2\right)=67.09$$

$S=8.19$

(5) 变异系数$S/|\bar{x}|=8.19\div425.05=0.0193$

例3 为了考察某种纤维长度的分布情况，抽取100根，量得长度(单位＝cm)如下：

6.5，6.4，6.7，5.8，5.9，5.2，4.0，5.4，4.6，5.8，
5.5，6.0，6.5，5.1，6.5，5.3，5.9，5.5，5.8，6.2，
5.4，5.0，5.0，6.8，6.0，5.0，5.7，6.0，5.5，6.8，
6.0，6.3，5.5，5.0，6.3，5.2，6.0，7.0，6.4，6.4，
5.8，5.9，5.7，6.8，6.6，6.0，6.4，5.7，7.4，6.0，
5.4，6.5，6.0，6.8，5.8，6.3，6.0，6.3，5.6，5.3，
6.4，5.7，6.7，6.2，5.6，6.0，6.7，6.7，6.0，5.5，
6.2，6.1，5.3，6.2，6.8，6.6，4.7，5.7，5.7，5.8，
5.3，7.0，6.0，6.0，5.9，5.4，6.0，5.2，6.0，5.3，
5.7，6.8，6.1，4.5，5.6，6.3，6.0，5.8，6.3.

试作出频数直方图。

解 (1) 最大值 $x_M=7.4$ 最小值 $x_m=4.0$

(2) 极差 $R=3.4$，取组距为0.3，由于 $\frac{3.4}{0.3}=11\frac{1}{3}$

应分为12组。

(3) 定起点、终点、分点。取起点 $a=3.95$分点为4.25，4.55，4.85，5.15，5.45，5.75，6.05，6.35，6.65，6.95，7.25，终点 $b=7.55$。

(4) 计算出上述100个数据落在各组中的频数，列表如下：

分　组	频数计算	频　数
3.95—4.25	一	1
4.25—4.55	一	1
4.55—4.85	T	2
4.85—5.15	正	5
5.15—5.45	正正一	11
5.45—5.75	正正正	15
5.75—6.05	正正正正正下	28
6.05—6.35	正正下	13
6.35—6.65	正正一	11
6.65—6.95	正正	10
6.95—7.25	T	2
7.25—7.55	一	1

（5） 作直方图如下：

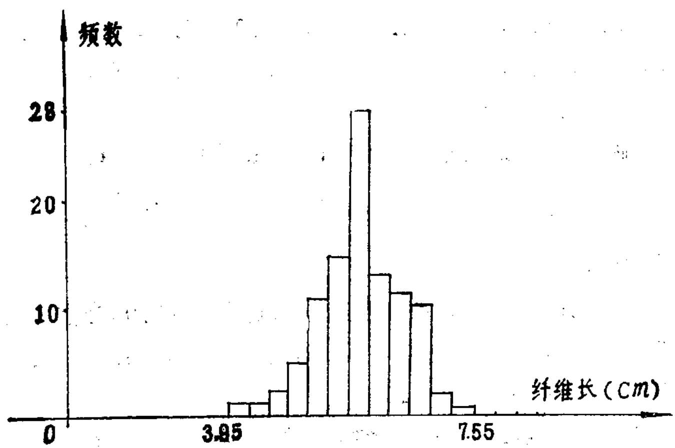

图1—1