青年学习辅导丛书

高中数学学习指导

北京四中数学编写组 编

电子工业出版社

青年学习辅导丛书

高中数学学习指导

北京四中《数学》编写组　编

电子工业出版社

内 容 提 要

本书概括了高中数学的几个方面(代数、立体几何、三角、解析几何)，从选材到分析以及解题方法，都是根据编写者多年来的教学体会加以整理写出的。书中的基本概念、基本法则的分析上，在解题的思路上，都有自己的特色，不论是对已经高中毕业正准备复习投考各类高等院校的青年，还是对正在学校学习的高中学生，都有一读的必要。

青年学习指导丛书

高中数学学习指导

北京四中《数学》编写组 编

责任编辑：洋溢

*

电子工业出版社出版(北京万寿路)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

隆昌印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/32 印张：17.625 字数：400千字

1986年1月第一版 1986年1月北京第一次印刷

印数：1～25600册 定价：2.85元

统一书号：7290·401

出版前言

当前，辅导青年学习数学的书籍很多，何以我们还出版这本《学习指导》呢？

我们觉得，学好数学大致有几个环节，即是：基本概念、基本法则的清晰与准确，思维方法的训练与逻辑上的严谨，以及在以这些为基础的综合与应用。解一道数学题，基本上没有固定的、硬记的方法或程式，全靠上述三个方面的掌握的情况，即使是数或式的运算，也不例外。为此，根据编者多年来的数学情况，把对这些方面的分析应用到解答数学问题中的一些体会整理出来，希望给读者以辅导，对他们有所裨益，这就是我们将这本书呈献于读者面前的一点愿望。

在编写过程中，编者仍按中学数学的几个方面（代数、立体几何、三角、解析几何）来分类，这样做无疑是考虑到一些读者复习时的方便，同时，在每一部份之间的联系也做了一些讨论，这对在校学生也会有一定的帮助。在内容上，对可以在教材上找到的定义、性质等，基本上都省略了，对一些重点内容，我们不吝笔墨，在例题的分析上，也尽量注意到它们的典型性以及解法的一般性，并特别注意提高读者的综合能力。我们希望读者使用本书时，先弄清所要求的基本概念，对例题要自己先做，然后再看书中给出的解法，并与之比较。至于每章的练习题，我们虽从巩固的角度上有一些考虑，但更重要的是希望通过这些练习，来弥补例题的不足，因此，对大部分练习题附加了较为详细的解答，以帮助读者尽可能全面地掌握基本知识、基本方法及其应用。

本书是原《高中课程总复习指导》的修订。由时间所限，书中难免有不妥和错误之处，望读者指正。

目　　录

前　　言

第一编　代数部分……1

第一章　数……1

第二章　解析式……24

第三章　方程和方程组……50

第四章　函数……76

第五章　不等式……102

第六章　排列　组合　二项式定理……120

第七章　数学的归纳法……138

第八章　数列……146

第九章　极限……168

第二编　立体几何……187

第一章　直线与平面……187

第二章　多面体和旋转体……205

第三编　三角……240

第一章　三角函数与反三角函数……240

第二章　三角函数与反三角函数的恒等变形……267

第三章　三角方程和三角不等式……313

第四章　三角函数的应用……342

第四编　解析几何……372

第一章　点的坐标……372

第二章　直线……379

第三章　圆锥曲线……388

第四章　极坐标和参数方程……406

第一编　代数部份

第一章　数

数是一切数学的基础，它来源于生产实践，数的概念是随着社会的发展和人们生产活动的实际需要，以及数学理论上的需要而不断地扩大和发展的。这章复习的重点是各种数集的概念、性质、表示方法和运算法则。

在中学里数的范围可归纳如下

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 正有理数
        - 正整数（自然数）
        - 一般正分数
          - 正有限小数
          - 正无限循环小数
      - 非正非负的有理数—零。
      - 负有理数
        - 负整数
        - 一般负分数
          - 负有限小数
          - 负无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数—正无限不循环小数
      - 负无理数—负无限不循环小数
  - 虚数

一、自然数　整数

了解自然数和整数的定义，掌握它们的性质，并能够灵活运用；在计算方面，应注意整数的整除问题；理解并掌握质数和合数、因数和质因数、最大公约数和最小公倍数、奇数和偶数的概念、性质及运算。

例 1　求证对于任何一个偶数a，a^3+20a能被48整除。

证明：设$a=2k(k\in Z)$，则$a^3+20a=(2k)^3+20\cdot 2k$

$$=8k^3+40k=8k(k^2+5)$$

如果能证出$k(k^2+5)$能被6整除，问题则得到解决

而$k(k^2+5)=k(k^2+6-1)=k(k^2-1)+6k$

$$=(k-1)\cdot k\cdot(k+1)+6k$$

$(k-1)\cdot k\cdot(k+1)$是三个连续整数之积必能被$3!=6$整除。即$k(k^2+5)$能被6整除。

$\therefore a^3+20a$能被48整除

例 2 若a、b、c是整数，且$a+b+c$能被6整除。

求证：$a^3+b^3+c^3$也能被6整除。

证明：$\because a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+c^3-3abc+3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

$\because a+b+c$能被6整除　　$\therefore a+b+c$是偶数

$\because$三数之中至少有一个偶数　$\therefore a\cdot b\cdot c$是偶数，$3abc$是6的倍数。

$\therefore a^3+b^3+c^3$能被6整除

说明：在证明问题时，要充分利用已知条件，找出条件与结论之间的关系，进行适当的变形是很重要的。

二、有理数

要了解有理数的概念，整数和分数总称为有理数，要记住任何一个有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$的形式，其中p为整数，q为正整数，同时，要理解和掌握有理数的性质、运算法则和基本运算律。

三、实数

1.有理数与无理数总称为实数，对实数与数轴的性质、

实数的绝对值及其性质，要做到熟练掌握、灵活运用；了解比和比例的概念和性质。

2.实数的运算

（1）实数的四则运算和有理数运算相同，基本定律在实数范围里仍然适用。

（2）实数的开方　实数a开n次方，就是求一个数x，使$x^n=a$，这个数用符号$\sqrt[n]{a}$来表示，即$(\sqrt[n]{a})^n=a$，因为任何实数的偶次方都不是负数，所以在实数范围内，负数不能开偶次方，在实数范围内，开方运算还不是永远可以实施。

（3）算术根　正数或负数的偶次方都是正数，所以任何一个正数的偶次方根必有两个，它们的绝对值相等而符号相反。正数的正的方根叫做算术根，如果a是正数，n是偶数，符号$\sqrt[n]{a}$表示算术根，$-\sqrt[n]{a}$表示正数a的负方根．算术根是唯一的。一个正数的奇次方根只有一个即算术根；一个负数的奇次方根也只有一个是负根，为了统一起见，今后求一个负数的奇次方根时，把根号内的符号提到根号前面，然后求根号内正数的算术根．$\sqrt[n]{a}$只要是实数，即除负数开偶次方的情况外，都归结为算术根，若n为偶数，则

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a\ (\text{当}a>0)\\0\ (\text{当}a=0)\\-a\ (\text{当}a<0)\end{cases}$$

利用绝对值的记号$\sqrt[n]{a^n}=|a|$．实数的绝对值的概念与算术根的概念是紧密联系的，这两个概念对于代数和三角运算来说是很重要的，忽视它就会导致错误。

例如 $\sqrt{\lg^2 x-2\lg x+1}=\sqrt{(\lg x-1)^2}=|\lg x-1|$

$$=\begin{cases}1-\lg x(0<x<10)\\ \lg x-1(x>0)。\end{cases}$$

如果认为$\sqrt{(\lg x-1)^2}=\lg x-1$就错了

由于实数的平方，实数的绝对值都是一个非负数。若a，b是实数，且$a^2+b^2=0$，则$a=b=0$；$a^2+b^2\neq 0$，则a、b不全为0，又$a^2+|b|=0$或$|a|+|b|=0$则$a=b=0$

例 1 设n是大于1的自然数，试证明$\sqrt[n]{2}$是无理数。

证明：用反证法

假如$\sqrt[n]{2}$不是无理数，而是有理数，则可表示成$\sqrt[n]{2}=\dfrac{b}{a}$（a、b是质数）两边n次方$b^n=2a^n$

$\therefore b^n$是偶数，b也是偶数

b可写成$2kb'$（k、b'是正整数）

$$(2kb')^n=2a^n,\quad a^n=2^{n-1}(b'k)^n$$

a^n就为偶数，a为偶数，与假设矛盾

$\therefore \sqrt[n]{2}$是无理数

说明：关于实数的有关证明题，常用反证法证明。

例 2 设A、B、C、D都是有理数、$\sqrt{C}$、$\sqrt{D}$都是无理数，则要使$A+\sqrt{C}=B+\sqrt{D}$，必须只须$A=B$，$C=D$。

解：$\because A+\sqrt{C}=B+\sqrt{D}$可变形$A-B+\sqrt{C}=\sqrt{D}$两边平方$(A-B)^2+2(A-B)\sqrt{C}+C=D$

$$(A-B)^2+(C-D)+2(A-B)\sqrt{C}=0$$

（$\because A$、B、C、D是有理数，$\sqrt{C}$是无理数，要使上式为0，必须只须有理数部分为0，无理数部分为0。）

$$\begin{cases}(A-B)^2+(C-D)=0 & (1)\\ A-B=0 & (2)\end{cases}$$

将(2)$A=B$代入(1)，$C=D$

反过来　当$A=B$，$C=D$有

$$A+\sqrt{C}=B+\sqrt{D}$$

例 3　已知实数a，b，c满足

$$\frac{1}{2}|a-b|+\sqrt{2b+c}+c^2-c+\frac{1}{4}=0$$

求$(b+c)^a$的值。

解：$\because \frac{1}{2}|a-b|\geqslant 0$　$\sqrt{2b+c}\geqslant 0$；

$$c^2-c+\frac{1}{4}=\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$$

故有
$$\begin{cases}a-b=0\\ 2b+c=0\\ c-\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$$

解之
$$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4}\\ b=-\dfrac{1}{4}\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore\ (b+c)^a=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$$

说明：有限个非负实数的和为0，则每个非负实数都是零，这个性质很重要。

例 4　用数学归纳法证明$5^n+2\times 3^{n-1}+1$能被8整除。

证明：1°当$n=1$时

$5^n+2\times3^{n-1}+1=5+2+1=8$　命题正确

2°当$n=k$时，即$5^k+2\times3^{k-1}+1$能被8整除

令　$5^k+2\times3^{k-1}+1=8p$

∵$5^{k+1}+2\times3^k+1=3(5^k+2\times3^{k-1}+1)+2(5^k-1)$

$=3\times8p+2\times4m$(∵5^k-1有$5-1=4$的因子，令其为m)

$=8(3p+m)$

∴当$n=k+1$时命题正确，根根1°，2°对任意自然数n，命题正确。

例 5　比较大小

（1）　$\sqrt{14+6\sqrt{5}}$和$\frac{16}{3}$；

（2）　$\sqrt{6}-2$ 和 $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$；

（3）　$3\sqrt{3}$、$\frac{10}{7}$、$\sqrt{2}$，　（读者自己解答）

（4）　$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}$和$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}$

解：

（4）

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}=[(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2]^{66}=(11+2\sqrt{30})^{66}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}=[(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2]^{66}=(11+2\sqrt{24})^{66}$$

$$11+2\sqrt{30}>11+2\sqrt{24}>0$$

$$\therefore\quad(\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}>(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}$$

上例是实数比较大小，都需要进行数的变换，通过此例，可给一些启发，当然还可用其他方法求解。

例 6 比较大小

（1） $\log_5 4$、0.6、$\log_3 2$；（读者自己解答）

（2） $\frac{2}{3}$、$\log_5 3$、$\log_{\sqrt{3}} 2$、$\frac{1}{\log_7 27}$、$\log_{\frac{1}{2}} 6$

解：（2） 即比较$\frac{2}{3}$、$\log_5 3$、$2\log_3 2 = \log_3 4$

$\frac{1}{3}\log_3 7$、$-\log_2 6$

$$\log_{\sqrt{3}} 2 = 2\log_3 2 = \log_3 4 > 1$$

$$\log_5 3 - \frac{2}{3} = \log_5 3 - \log_5 5^{\frac{2}{3}}$$

$$= \log_5 \sqrt[3]{\frac{27}{25}} > 0$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{\log_7 27} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\log_3 7$$

$$= \log_3 \sqrt[3]{\frac{9}{7}} > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 6 = -\log_2 6$$

$$\therefore \quad \log_{\frac{1}{2}} 6 < \frac{1}{\log_7 27} < \frac{2}{3}$$

$$< \log_5 3 < \log_{\sqrt{5}} 2$$

上例是实数比较，要用到对数的概念进行变换，根据实数的性质，对于实数a、b，$a > b$，$a = b$，$a < b$的充要条件是$a-b>0$，$a-b=0$，$a-b<0$。这个性质很重要，以后经常用到。还可用两数的比，决定大小。

例 7 确定a值的范围

（1） $\log_a 0.7 > \log_a 1.5$

（2） $\log_5 a > \log_5 125$

（3） $\log_{0.4}a>\log_{0.4}2$

解：（1） $\because 0.7<1.5$ $\therefore 0<a<1$

（2） 底数相同是 $5>0$ $\therefore a>125$

（3） 底数相同 $0<0.4<1$ $\therefore 0<a<2$

例8 a 是任意实数

化简 $\sqrt{a(a+8)+16}-|2a+1|+|4-a|$

解： 原式 $=|a+4|-|2a+1|+|4-a|$

当 $a<-4$ 时，原式 $=-(a+4)+(2a+1)$
$+4-a=1$

当 $-4\leqslant a<-\frac{1}{2}$ 时，原式 $=(a+4)+(2a+1)$
$+4-a=2a+9$

当 $-\frac{1}{2}\leqslant a<4$ 时，原式 $=(a+4)-(2a+1)$
$+4-a=-2a+7$

当 $a\geqslant 4$ 时，原式 $=(a+4)-(2a+1)+a-4$
$=-1$

例9 求使 $|x-3|-|x|=3$ 成立的实数 x。

解：（1） 当 $x<0$ 时，$|x-3|-|x|=3$ 化为

$$3-x-(-x)=3.$$

$3-x+x=3$ $3=3$ 方程有无穷多个解.

$\therefore$ x 可取小于 0 的一切数

（2） 当 $0\leqslant x<3$ 时，原方程化为

$$3-x-x=3$$

$$-2x=0,\ x=0$$

$\therefore$ x 可取 0

（3） 当 $x\geqslant 3$ 时，原方程化为 $x-3-x=3$

$-3=3$，无解。

综合三种情况 x 可取小于或等于 0 的一切实数。

说明以上两例都要根据实数绝对值的性质，分段讨论，最好用数轴上分段的方法比较直观，也不易出错。

四、复数

1．虚数单位

i 叫虚数单位，规定

（1） $i^2=-1$

（2） 它和实数进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立。

根据（1）i 是 -1 的一个平方根，$-i$ 是 -1 的另一平方根，如果 $a>0$，$-a$ 的平方根是 $\sqrt{a}\,i$ 和 $-\sqrt{a}\,i$，不要写成 $\sqrt{-a}$，因为 $\sqrt{-a}$ 不是根式，必须把 $\sqrt{-a}$ 写成 $\sqrt{a}\,i$，如 $\sqrt{-16}$ 要写 $\sqrt{16}i$。

（3） 如果 $n\in N$，则 $i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$。

2．了解复数的定义，学会复数的几何表示和它的三角形式、指数形式，理解并熟练运用复数的性质和运算

例 1 求适合下列各式的实数 x 和 y。

（1） $(1+2i)x+(3-10i)y=5-6i$

（2） $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{5}{1-3i}$

解：（1） 从原式变形 $x+3y+(2x-10)i=5-6i$，

根据复数相等的条件 $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-10y=-6 \end{cases}$

解之得出： $x=2$ $y=1$ 即 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

（2） 根据共轭复数之积是实数，化简分式，再把分子展开，加以整理，再根据相等条件求出：

$$\frac{x(1+i)}{2}+\frac{y(1+2i)}{5}=\frac{5(1+3i)}{10}$$

$$5x+2y+(5x+4y)i=5+10i$$

$$\begin{cases}5x+2y=5\\5x+4y=15\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}$$

例2 m为何值时，复数$m^2-5m+6+(m^2-m-2)i$的对应点（1）在实轴上，（2）在虚轴上，（3）在原点，（4）在第二象限，（5）在复平面上半部。

解：设 $a=m^2-5m+6$，$b=m^2-m-2$，

则 $a=(m-2)(m-3)$　$b=(m-2)(m+1)$

（1） 在实轴上要求 $b=0$　即$(m-2)(m+1)=0$

$$\therefore\quad m=2 \text{ 或 } m=-1$$

（2） 在虚轴上要求 $a=0$，$b\neq 0$。

即：
$$\begin{cases}(m-2)(m-3)=0\\(m-2)(m+1)\neq 0\end{cases}$$

解之得：
$$\begin{cases}m=2 \text{ 或 } m=3\\m\neq 2 \text{ 或 } m\neq -1\end{cases}\quad\therefore\quad m=3$$

（3） 在原点要求 $a=b=0$

即：
$$\begin{cases}(m-2)(m-3)=0\\(m-2)(m+1)=0\end{cases}$$

解之得：
$$\begin{cases}m=2 \text{ 或 } m=3\\m=2 \text{ 或 } m=-1\end{cases}\quad\therefore\quad m=2$$

（4） 在第二象限要求 $a<0$　$b>0$。

即：
$$\begin{cases}(m-2)(m-3)<0\\(m-2)(m+1)>0\end{cases}$$

解之得： $\begin{cases}2<m<3\\ m<-1\text{ 或 }m>2\end{cases}$ $\therefore\quad 2<m<3$

（5） 在复平面上半部要求 $b>0$

即： $(m-2)(m+1)>0$

解之得： $m>2$ 或 $m<-1$

例3 已知复数的模为2，实部为$\sqrt{3}$，求这复数的代数形式和三角形式．

解：设这个复数的代数形式为$\sqrt{3}+bi$（$b\in R$）

根据题意，$\sqrt{(\sqrt{3})^2+b^2}=2$，得：$b=\pm 1$

$\therefore$ 复数为$z_1=\sqrt{3}+i$ $z_2=\sqrt{3}-i$

$\because$ z_1与z_2的辐角主值分别为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{11\pi}{6}$

$$\therefore\quad z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

例4 已知z是复数，$|z|-z=\frac{2i}{1+i}$且$x^2-z=0$

求x。

解： 令$z=a+bi$，由已知得$\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi)$

$$=\frac{2i}{1+i}$$

即： $\sqrt{a^2+b^2}-a)-bi=1+i$

根据复数相等条件得

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1\\ -b=1\end{cases}\quad\text{解之得出}\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}$$

$\because$ $z=-i$ $\therefore$ $x^2+i=0$

$$x^2=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$x=\cos\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{2}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}{2}$$

$$(k=0,\ 1)$$

$$\therefore\quad x_1=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_2=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

例 5 若$z=\cos\theta+i\sin\theta$求$z_1=z^2-z$的辐角。

解： $z_1=(\cos\theta+i\sin\theta)^2-(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=\cos^2\theta+2i\sin\theta\cdot\cos\theta-\sin^2\theta-\cos\theta-i\sin\theta$$

$$=\cos^2\theta-\sin^2\theta-\cos\theta+2i\sin\theta\cdot\cos\theta-i\sin\theta$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{3\theta}{2}+i\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\therefore |z_1|=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{3\theta}{2}+\cos^2\frac{3\theta}{2}\right)}$$

$$=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

（1） 如果$\sin\frac{\theta}{2}=0$，则$\theta=2k\pi(k\in z)$

$|z_1|=0$ ∴ $z_1=0$ z_1的辐角无定义

（2） 如果$\sin\frac{\theta}{2}>0$，即当$2k\pi<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi$，或$4k\pi<\theta<(4k+2)\pi$

$$|z_1|=2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$z_1=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi+3\theta}{2}+i\sin\frac{\pi+3\theta}{2}\right),$$