大学文科数学简明教程

（下 册）

姚孟臣 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等学校文科数学基础课教材

大学文科数学简明教程

（下　册）

姚孟臣　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学简明教程·下册/姚孟臣编著.—北京:北京大学出版社,2004.11

ISBN 7-301-07952-4

Ⅰ.大…　Ⅱ.姚…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第104526号

书　　名:大学文科数学简明教程(下册)

著作责任者:姚孟臣　编著

责 任 编 辑:刘　勇

标 准 书 号:ISBN 7-301-07952-4/O·0619

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661

印　刷　者:北京中科印刷有限公司

经　销　者:新华书店

890 mm×1240 mm　A5　9.25 印张　266 千字

2004 年 11 月第 1 版　2004 年 11 月第 1 次印刷

印　　数:0001—4000 册

定　　价:15.00 元

前　言

20世纪70年代以来，我们为北京大学等院校文科各系各专业讲授“高等数学”课程期间，在课程内容体系上进行了多次改革，先后编写了《大学文科基础数学》、《文科高等数学教程》和《大学文科高等数学》等多部教材，深受广大师生的好评。

文科高等数学(包括微积分、线性代数和概率统计)是文科类各专业的一门基础课。针对目前全国各高校的不同专业方向对基础数学要求有一定差异，在总学时不多的情况下，编写一套能够科学地阐述高等数学的基本内容、全面系统地介绍有关基本原理和基本方法的简明易懂的教材尤为重要。

根据高等教育面向21世纪教学内容和课程改革总目标的要求，结合作者30年来讲授文科高等数学课程的实践，我们又编写了这套《大学文科数学简明教程》教材，其中包括主教材《大学文科数学简明教程》(上、下册)以及与之配套的辅导教材《大学文科数学解题指南》共三册。本套教材包括三部分内容：第一部分“微积分”，第二部分“线性代数”，第三部分“概率统计”。第一部分“微积分”编写在上册，上册共分五章，内容包括函数与极限、一元函数微分学、中值定理和导数的应用、一元函数积分学、多元函数微积分。在附录中还分别介绍了无穷级数与常微分方程的有关知识。第二部分“线性代数”和第三部分“概率统计”编写在下册，下册共分为五章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、初等概率论与数理统计基础等。讲授以上全部内容可以安排在两个学期，按每个学期17周、每周3个学时计算，总共需要102个学时。本套

教材按章配备了适量的习题，书末附有答案与提示，供教师和学生参考。

本套教材可作为一般院校文科类各专业的数学基础课教材，其下册又可作为自学考试高等数学(二)“线性代数与概率统计”课程的主教材使用。对于“线性代数与概率统计”课程要求较低的理工科各专业也可选用本教材。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2004年9月8日于

北京大学中关园

目　录

第二部分 线性代数

第一章 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具,在线性方程组、矩阵中都需要用到行列式.本章从二阶、三阶行列式出发,引出 n 阶行列式的概念,进而讨论 n 阶行列式的基本性质及其计算方法,最后介绍用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1 行列式的定义

1.1 二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式是在研究二元、三元线性方程组的解时引出的一种数学符号.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

为了求出方程组(1.1)的解,我们可以利用加减消元法,得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

因此,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组(1.1)有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式,我们引进下面的记号.

定义 1.1　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为**二阶行列式**,它表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的**元素**,横排的称为**行**,纵排的称为**列**.

二阶行列式的计算也可根据图 1-1 来记忆,图中,沿实线相连的两个数的乘积取正号,沿虚线相连的两个数的乘积取负号. 它们的代数和就是(1.3)式所表示的二阶行列式.

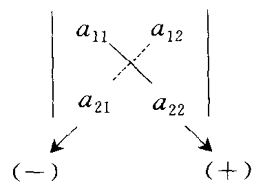

图　1-1

例如,$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-(-1)\times3=11.$

根据定义,(1.2)式中两个分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

分母记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

D 称为方程组(1.1)的**系数行列式**.

于是,当 $D\neq0$ 时,方程组(1.1)的惟一解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.4}$$

例 1　解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$$

解 因为方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-3) \times 4 = 15 \neq 0,$$

所以方程组有惟一解.由(1.4)式,还需计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 30,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{30}{15} = 2,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-15}{15} = -1.$$

类似地,为了讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

的解,也可以由相应的三阶行列式简化表示.

定义 1.2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为**三阶行列式**,它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.6}$$

三阶行列式所表示的代数和可以利用图 1-2 来记忆. 在图 1-2

中，沿各实线相连的三个数的乘积取正号，沿各虚线相连的三个数的乘积取负号．它们的代数和就是(1.6)式所表示的三阶行列式．

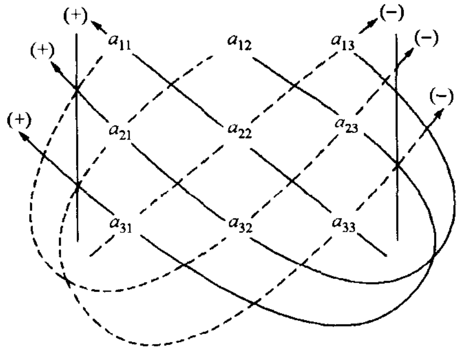

图　1-2

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times3\times(-2)+3\times1\times2+5\times1\times(-4)$$

$$-5\times3\times2-2\times1\times1-3\times(-4)\times(-2)$$

$$=-82.$$

对于三元线性方程组(1.5)，令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为方程组(1.5)的**系数行列式**，再令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D_1,D_2,D_3 是把 D 中第 1，2，3 列分别换成常数项 b_1,b_2,b_3 得到的行列式．

用加减消元法可以验证：当系数行列式 $D\neq0$ 时，方程组(1.5)

有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

对照二元线性方程组(1.1)与求解公式(1.4),不难发现三元线性方程组(1.5)与求解公式(1.6)有类似的特点. 在§4中我们将证明,在一定的条件下,三元以上的线性方程组也有类似的求解公式.

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-\ x_2+x_3=26,\\2x_1-4x_2-x_3=9,\\ \ x_1+2x_2+x_3=16.\end{cases}$$

解 这里

$$D=\begin{vmatrix}3&-1&1\\2&-4&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=5\neq 0,$$

故方程组有惟一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}26&-1&1\\9&-4&-1\\16&2&1\end{vmatrix}=55,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&26&1\\2&9&-1\\1&16&1\end{vmatrix}=20,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&-1&26\\2&-4&9\\1&2&16\end{vmatrix}=-15.$$

因此,方程组的解为

$$x_1=\frac{55}{5}=11,\quad x_2=\frac{20}{5}=4,\quad x_3=\frac{-15}{5}=-3.$$

1.2 排列与逆序

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式,需要先介绍下面的预备知识.

定义 1.3 由自然数 1,2,3,…,n 组成的一个有序数组,称为一个 n **级排列**.

例如，1234 和 2134 都是四级排列;25413 和 23415 都是五级排列.

由 1,2,…,n 组成的 n 级排列的总数为 $n!$. 所有这些排列中只有一个排列 $123\cdots n$ 是按自然顺序排列的,称之为**自然序排列**.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,如果有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面,则 j_tj_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数,称为该排列的**逆序数**,记作 $N(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数是奇数的排列称为**奇排列**,是偶数的排列称为**偶排列**.

例如,在排列 25413 中,2 后面有 1 个数字比 2 小,5 后面有 3 个数字比 5 小,4 后面有 2 个数字比 4 小,故

$$N(25413) = 1 + 3 + 2 = 6,$$

同法可求得 $$N(23415)=3.$$

排列 25413 是偶排列,排列 23415 是奇排列. 因 $N(12\cdots n)=0$,故自然序排列是偶排列.

例 3 写出由 1,2,3 这三个数码构成的所有三级排列,并确定它们的奇偶性.

解 由 1,2,3 这三个数码构成的三级排列共有 $3!=6$ 个,其排列情况、逆序数以及奇偶性如下表所示:

排　列	逆序数	排列的奇偶性
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

例 4 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 因为在这个排列中,n 后面比它小的数有 $n-1$ 个,$(n-1)$

后面比它小的数有 $n-2$ 个，…，3 后面比它小的数有 2 个，2 后面比它小的数有 1 个，因此

$$\begin{aligned} N(n(n-1)\cdots 321) &= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

1.3 n 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

从中可以发现：

(1) 它的每一项都是不同行、不同列的三个元素的乘积，每一项除符号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1j_2j_3$ 为三级排列；

(2) 当 $j_1j_2j_3$ 取遍了三级排列(共 6 个)时，就得到三阶行列式的所有项(每项冠以的符号除外)共 $3!=6$ 个项；

(3) 每一项的符号是：当这一项中元素的行标按自然顺序排列时，如果对应的列标构成的排列为偶排列时冠以"+"号，为奇排列时冠以"−"号.

综上所述，作为三阶行列式的展开式中的一般项可以表示为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

因而，三阶行列式可简写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中"$\sum$"表示对所有的三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

根据三阶行列式的内在规律，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**. 它表示一个数值. 此数值是所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是：当这一项的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的 n 级排列是偶排列，则冠以正号，如是奇排列，则冠以负号，其一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，得到代数和中的所有项，共有 $n!$ 个项.

n 阶行列式可简记为 $D=|a_{ij}|$，用"$\sum$"表示对 $j_1j_2\cdots j_n$ 所有的 n 级排列求和，则 n 阶行列式可简写成

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由上述定义可知：当 $n=2$ 时即二阶行列式，当 $n=3$ 时即三阶行列式. 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 5 确定五阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中 $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$ 与 $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 两项的符号.

解 由于 $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$ 各元素的行标已按自然序排列，列标所构成的排列为 1 4 5 2 3，考虑到 $N(1\ 4\ 5\ 2\ 3)=4$，故这一项应取正号.

为了确定 $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 的符号，首先把它改为 $a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}$，这时列标所构成的排列为 5 4 1 2 3，考虑到 $N(5\ 4\ 1\ 2\ 3)=7$，故这一项应取负号.