大学自学辅导丛书

数学

陈强 姚亚君 刘恒编

湖南科学技术出版社

大学自学辅导丛书

数学

陈 强 姚亚君 刘 恒 编

湖南科学技术出版社

大学自学辅导丛书
数　学
陈　强　姚亚君　刘　恒编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1988年8月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/32　印张：15.5　字数：356,000
印数：1—3,800

ISBN 7—5357—0247—3
O·30　定价：3.75元

湘目　87—40

前言

问题是数学的核心. 学习数学, 需要通过解题来加深对基本概念、基本理论和方法的熟练掌握与运用, 提高分析问题和解决问题的能力. 然而, 人们在学习高等数学、工程数学的过程中, 却往往在解题时会遇到不少困难, 特别是电大学员与自学者, 由于学习任务重, 时间安排紧, 与教师交谈少, 缺乏及时的辅导, 因此这方面遇到的困难更为突出. 为此, 我们编写了这本以解题辅导为主的参考书, 希望对他们能有所帮助.

本书共分十二章, 前十一章包括高等数学八章, 线性代数、概率统计、复变函数各一章. 在这些章节中, 我们先总结、归纳其主要内容与解题方法, 然后配以例题. 在叙述上, 力求内容全面, 简明扼要, 重点突出; 有些部分还用表格的形式列出, 以便读者对比、记忆. 同时, 对学习中容易出现的模糊认识、误解或差错, 以及解题思路、注意事项等, 还适当予以说明.

本书共配置有500多道例题, 包括:

1） 中央广播电视大学工科数学的部分试题。这些试题集中反映了本课程的基本要求，它们荟萃精华，覆盖全面，具有适宜的难度、深度与广度。书中对试题逐一作出解答，并按教学内容、解题方法分散编排于各章节，以便读者复习。

2） 某些较难的典型例题，书中标以*号，以示与试题区别。

3） 第十二章编演了十六所高等学校的部分高等数学试题。大部分试题有相当难度和一定的技巧，它们对开阔思路，灵活运用基本知识解题颇有启发。同时，试题涉及内容广泛，类型齐全。书中又按教学内容、解题方法编排，因此可供读者作为复习之用。

本书的第一、四、六、七等章由姚亚君编写；第二、三、五、九等章由刘恒编写；第八、十、十一、十二等章由陈强编写。全书由陈强主编。

本书在编写过程中，参考了高等数学、工程数学的许多辅导书与资料，采用了中央广播电视大学的历届工科数学试题与一些院校的高等数学试题，以及湖南省高等教育自学考试的高等数学试题，并承邹节铣副教授审稿，特致衷心的感谢！

编 者

一九八五年元月

目 录

第一章　函数　极限　连续性

§1　函数

一　求函数的定义域

使函数有意义的自变量 x 的数值的集合叫函数的定义域．当函数用式子表示时，一切能使这式子有意义的实数值的全体，就是这函数的定义域．求函数的定义域应很熟悉基本初等函数的定义域，并注意某些运算对函数的限制，如：分式中分母不能为零，根式中负数不能开偶次方，对数中真数不能为负数和零等等．

1.1.1　求函数$y=1/(x^2-5x+6)$的定义域．

解　解方程$x^2-5x+6=0$，得其根$x_1=2$，$x_2=3$．即当$x=2$，$x=3$时题中分母为零，函数y无意义，故所求定义域为$(-\infty, 2)$，$(2, 3)$，$(3, +\infty)$．

复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域是$u=\varphi(x)$的定义域中使$y=f(u)$有意义的x的取值范围．

1.1.2　填空：函数$y=\arcsin e^x$的定义域是(　　)．

解　设$y=\arcsin u$，$u=e^x$．因$-1\leqslant u\leqslant 1$，但e^x只取正值，故$0<e^x\leqslant 1$．因此，所求定义域为$(-\infty, 0]$，即$-\infty<x\leqslant 0$．

如果已知函数$y=f(x)$的定义域，要求复合函数$y=f(u)$的

定义域，这可由x的变化范围推广到u的变化范围而求得。

1.1.3* 设$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求$f(\sin x)$，$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域。

解 欲使$f(\sin x)$有意义，必须使$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，即$f(\sin x)$的定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi]$（$k$是整数）。

欲使$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$有意义，必须使$0\leqslant x+a\leqslant 1$与$0\leqslant x-a\leqslant 1$同时成立，即$-a\leqslant x\leqslant 1-a$与$a\leqslant x\leqslant 1+a$同时成立，由此得$a\leqslant x\leqslant 1-a$。但当$a>1/2$时此式不成立，故得：若$0<a\leqslant 1/2$时，$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域为$[a,1-a]$；若$a>1/2$时，此函数的定义域不存在。

二 求函数值或函数式

如果已知$f(x)$的表达式，要求函数值$f(a)$或函数式$f[g(x)]$，只要将a或$g(x)$代替$f(x)$表达式中的x即可。

1.1.4 填空：若$f(x)=x^2+2$，则有$f(2^x)=($ $)$。

解 将$f(x)$表达式中的x换为2^x，即得

$$f(2^x)=(2^x)^2+2=2^{2x}+2.$$

1.1.5* 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$。

解 将$f(x)$表达式中的x换为$f(x)$，即换为$\dfrac{1}{1-x}$，得

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}.$$

$$(x\neq 1,x\neq 0).$$

将$f(x)$表达式中的x换为$f[f(x)]$，即换为$1-\dfrac{1}{x}$，得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x. \qquad (x\neq 1,\ x\neq 0).$$

注意，对于分段函数$f(x)$，当x在不同的区间时，$f(x)$的表达式是不同的。因此，求$f(a)$或$f[g(x)]$时，应按a或$g(x)$所在区间代入$f(x)$相应的表达式。

1.1.6* 设$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2, & 1<x<2.\end{cases}$ 求$f(2x)$。

解 求$f(2x)$应将$f(x)$ 表达式中的x换为$2x$来考虑。当$0\leqslant 2x\leqslant 1$，即$0\leqslant x\leqslant 1/2$时$f(2x)=1$；当$1<2x<2$，即$\frac{1}{2}<x<1$时$f(2x)=2$。故所求

$$f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2};\\ 2, & \frac{1}{2}<x<1.\end{cases}$$

〔注〕 $f(x)$的定义域为$0\leqslant x<2$，$f(2x)$ 的定义域为$0\leqslant 2x<2$，即$0\leqslant x<1$。

三 函数奇偶性的判别

1 利用定义判别 设函数$f(x)$定义在对称区间$(-l, l)$（也可以是无穷对称区间）上。若$f(x)$满足$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为区间$(-l, l)$上的一个奇函数；若$f(x)$满足$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为区间$(-l, l)$上的一个偶函数。

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于y轴对称。

2 常见奇、偶函数 奇次幂函数$y=x^{2k+1}(k=0,1,2,\cdots)$，$y=\sin x$，$y=\operatorname{tg} x\left(x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$是$(-\infty, +\infty)$上的奇函数；偶次幂函数$y=x^{2k}(k=1, 2, \cdots)$，$y=\cos x$是$(-\infty, +\infty)$上的偶函数。

注意分段函数中的奇、偶函数，例如，函数$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$

为偶函数，$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0; \\ 0, & x=0; \\ 1, & x>0.\end{cases}$ 为奇函数，而 $y=f(x)=\begin{cases}-1, & x<0; \\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 为非奇非偶函数（后一函数$f(x)$显然不是偶函数，而$f(0)=1$，$-f(-0)=-1$，故$f(x)$也不是奇函数）。

3　利用性质判别　偶函数之和(差)是偶函数，奇函数之和(差)是奇函数；两个偶函数或两个奇函数之积或商（分母不为零）是偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积或商（分母不为零）是奇函数。

1.1.7　填空：若$y=f(x)$是区间$(-l, l)$上的偶函数，则$f(-x)=(\quad\quad)$。

答　$(f(x))$。

1.1.8*　试证$f(x)+f(-x)$是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数。

证　记 $g(x)=f(x)+f(-x)$，因 $g(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=g(x)$，故 $g(x)$ 是偶函数。记 $\varphi(x)=f(x)-f(-x)$，因 $\varphi(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-\varphi(x)$，故 $\varphi(x)$ 是奇函数。

§2　极限

一　常见的极限值

1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1$；

2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$；

3　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\infty, & \text{当 } n>m;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m;\\ 0, & \text{当 } n<m.\end{cases}$

（其中$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$）

4　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\ln x}=+\infty(a>0)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln x=0(a>0)$；

5　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$；

6　$\lim\limits_{x\to 0^+}x^a e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$；

7　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$；

8　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,(a>0)$；

9　$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{a}=1\ (a>0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$；

10　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } r>1;\\ 1, & \text{当 } r=1;\\ 0, & \text{当 } |r|<1;\\ \text{不确定}, & \text{当 } r\leqslant -1.\end{cases}$

二　求极限的基本方法

1　用函数极限的定义验证某常数是已知函数的极限。验证大致分以下几步：1)将要证的命题用定义形式写出；2)分析差$|f(x)-A|<\varepsilon$成立之条件；3)根据第二步的分析，证明第一步所列出的命题。

2　利用函数极限存在的判别法求极限或证明极限的存在

性。函数极限存在的判别法有：

1） 两边夹准则 设在x_0的某邻域$(0<|x-x_0|<\delta_0)$内满足$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$。

2） 单调有界准则 若$f(x)$在$(a,\ b)$单调增加（或减少），且在$(a,\ b)f(x)\leqslant M$（或$f(x)\geqslant m$），则$\lim\limits_{x\to b} f(x)$必存在且不超过$M$（或不小于$m$）（特别情形$b=+\infty$）。

3） 左右极限相等 函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是：左极限等于右极限，即$f(x_0-0)=f(x_0+0)$（参看1.3.2题等）。

此外还有柯西极限存在准则（略述）等。

3 利用极限的基本公式（即四则运算法则）设$\lim f(x)$，$\lim g(x)$存在，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x),$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x),$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\qquad(\lim g(x)\neq 0).$$

注意，这些公式只有在$\lim f(x)$，$\lim g(x)$存在时才可使用；而在关于商的极限运算公式中，分母决不可为零。对于$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$情形，应按不定式类型求之。

4 利用函数的连续性

（1） 如果x_0是初等函数$f(x)$定义域内之一点，则可利用$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$求极限。

（2） 若$f[\varphi(x)]$是复合函数，又$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且$f(u)$在$u=a$处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$，即这时可

将极限号“移”到复合函数的运算符号里面。(注：$x \to \infty$有相同结论)(参看1.2.1题等)。

5　利用约简分式、有理化分子或分母等方法化去不定型(参看1.2.2题(3)等)。

6　利用有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小的定理(参看1.2.5题(3)等)。

7　利用无穷大与无穷小互为“倒数”的关系。

8　利用常见极限，特别是两个重要极限$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{z \to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$　(参看1.2.4题(1)等)。

9　利用变量代换。将所求极限化为已知极限。

10　利用洛必达法则求不定式的极限

(1) $\left[\dfrac{0}{0}\right]$型　设1) $\lim\limits_{x \to a}f(x)=\lim\limits_{x \to a}g(x)=0$；2) 在点$a$的邻域(点$a$除外)$f'(x)$、$g'(x)$存在且$g'(x)\neq 0$；3) $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$(有穷或无穷)，则$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$。　(参看1.2.3题(2)、2.1.17题等)。

(2) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$型　设1) $\lim\limits_{x \to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x \to a}g(x)=\infty$；2)、3)同上，则$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$　(参看1.2.2题(2)等)

〔注〕 1) 以上当$x \to \infty$时，2)中某邻域改为$|x|>N$，则有同样结论；

2) 若$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$亦为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，可再用以上方法计算。

(3) [$0\cdot\infty$或$\infty-\infty$]型　可先根据问题特点用代数变形或

三角恒等变换等方法化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型 （参看1.2.3题(3)等）

（4）[1^∞，0^0，∞^0]型] 对于$\lim[f(x)]^{g(x)}$的不定式0^0，∞^0，1^∞型可先化为指数形式或用两边取对数的形式化为$0\cdot\infty$，$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型 （参看1.2.5题(2)等）。

〔注〕 运用洛必达法则求极限要注意几点：

1） 注意法则的条件，不符合条件不可用法则。

2） 运用法则是分别求分子、分母的导数，而不是求整个分式的导数。

3） 要及时化简极限符号后面的分式，化简后注意检查是否仍是不定式，若不再为不定式时，就不能再用洛必达法则。

4） 运算过程中常结合使用恒等变形、变量代换等其他方法或利用已知极限，这样往往可将问题简化（参看1.2.4题(2)等）。

5） 当$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时，本法则失效，这时求极限应采用其他方法。

11 利用等价无穷小替代 若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$。常用的等价无穷小有：当$x\to0$时，$x\sim\sin x\sim \mathrm{tg}\,x\sim(e^x-1)\sim\ln(1+x)\sim\arcsin x\sim\mathrm{arc\,tg}\,x$ 等。（参看1.2.4题(2)等）。（注意，和或差中的项不能轻易用等价无穷小替换，例如，$\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{tg}\,x-\sin x)/\sin^3x=1/2$，若简单地用 $\mathrm{tg}\,x$代换$\sin x$，就会得出错误结果）。

12 利用泰勒公式 （参看1.2.10题）。

13 利用积分中值定理 （参看1.2.11题）。

三 求数列极限的基本方法

数列$\{a_n\}$可以看作是以正整数集合为定义域的一种函数：$a_n=f(n)$，因此求极限有与以上类似的一些方法，此处不再重述。这里特别指出以下几种方法：

1 利用数列极限与函数极限的关系 数列$\{a_n\}=\{f(n)\}$，若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在(有限或无限)，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，于是化为求函数的极限 （参看1.2.7题）。

2 利用"单调有界准则"求极限的具体作法是：(1) 判定(证明)数列是单调有界的，从而可设其极限为A (此步必不可少，否则可能引起错误)；(2) 建立数列相邻两项间的关系式；(3) 对此关系式两端取极限，得一关于A的方程，从中解出A值即为所求。 （参看1.2.9题）。

3 利用自然数、等差级数、等比级数求和公式，利用部分分式法拆项相消等方法求某些项数不确定的和式的极限。

4 利用定积分求某些项数无限增多的无穷小之和的极限(参看1.2.8题)。

5 利用级数收敛的必要条件求极限 对于数列$\{u_n\}$，若判别出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

1.2.1 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$。

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}(\sqrt{1+x^2}+1)=2。$$