数学真题1＋1系列

考研真题数学三

2006～1997

详解·拓展·评析

主编 世华 潘正义

吃透真题 考研成功一半！

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

○考研数学真题1＋1系列○

考研真题数学三

2006～1997

详解·拓展·评析

主编 世华 潘正义

世界图书出版公司

考研真题数学三

详解·拓展·评析

主　　编：世　华　潘正义
责任编辑：李根宾
封面设计：林娜娜

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
（北京朝内大街137号　电话:88861708　邮编:100089）
销　　售：各地新华书店
印　　刷：廊坊人民印刷厂印刷

开　　本：787×1092毫米　1/16
印　　张：7.75
字　　数：210千字
版　　次：2006年2月第1版　2006年2月第1次印刷

ISBN 7-5062-7339-X/H·762　　定价:8.80元

服务热线：010－88861708

考试在线:www.kaoshi.tv

关于数学真题的公告

一、我们为什么需要真题

真题是你复习备考的总方向，未来考题只在难易程度上围绕过去的真题小幅波动，你的一切努力就是为了征服它。

真题是一面镜子，能够反映你在不同的复习阶段与它有多大的距离。

真题是一扇窗口，你能看到你想看的风景。

真题是一堆宝藏，做得多、练得熟了，你自己都能总结出命题规律。

真题是一台测速仪，做题的速度也许会直接决定你的成绩。

二、关于《真题集》

《真题集》是公共资源，没有知产附加价值，因此，我们无偿为你提供服务，提供完全真实的训练平台，你付出的只是生产成本。

三、关于真题解析

本部分严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写，汇集最近十年数学全部考研试题的详细解析。通过『**命题目的**』、『**思路点拨**』、『**详细解答**』、『**易错辨析**』、『**延伸拓展**』几个步骤对历年真题进行全方位的剖析，以达到通过真题学习数学，进而举一反三、触类旁通，掌握数学的目的。通过每套试卷的考点分布表统计历年真题的考点分布，让读者很直观地把握考试重点，了解命题特点。通过试卷评析，点评每套试卷的难点与重点，帮助读者把握命题规律，做到有的放矢。

编　者

目 录

2006年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题详解、拓展及评析

一、填空题

(1)【标准答案】 1.

【命题目的】 本题考查求不定式的极限.

【详细解答】 当 $n = 2k$ 时,原式 $= \lim\limits_{k\to\infty}(\dfrac{2k+1}{2k})^{(-1)^{2k}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k+1}{2k} = 1$

当 $n = 2k-1$ 时,原式 $= \lim\limits_{k\to\infty}(\dfrac{2k}{2k-1})^{(-1)^{2k-1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k-1}{2k} = 1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})^{(-1)^n} = 1$

【易错辨析】 该题容易混淆为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$ = 不存在.

【延伸拓展】 对于数列 $\{x_n\}$,若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$, $x_{2k}\to a(k\to\infty)$,则 $x_n\to a(x\to\infty)$.

---

(2)【标准答案】 $2e^3$.

【命题目的】 本题考查了三阶导数的计算.

【详细解答】 $f'(2) = e^{f(2)} = e$

$f''(x) = e^{f(x)}f'(x)$, $f''(2) = e^{f(2)}f'(2) = e^2$

$f'''(x) = e^{f(x)}[f'(x)]^2 + e^{f(x)}f''(x)$

$f'''(2) = e^{f(2)}[f'(2)]^2 + e^{f(2)}f''(2) = e^3 + e\cdot e^2 = 2e^3$.

【易错辨析】 求导时易出现计算错误.

【延伸拓展】 本题可求出 $f^n(x)$ 的通项表达式.

---

(3)【标准答案】 $4dx - 2dy$.

【命题目的】 考查了隐函数的微分.

【详细解答】 $dz = f'(4x^2 - y^2)8xdx - f'(4x^2 - y^2)2ydy$

$dz\Big|_{(1,2)} = f'(0)8dx - f'(0)4dy = 4dx - 2dy$.

【易错辨析】 逐项微分后,再代入数值计算.

【延伸拓展】 该题可用微分形式不变性来解:

$dz = f'(4x^2 - y^2)d(4x^2 - y^2) = f'(4x^2 - y^2)(8xdx - 2ydy)$.

---

(4)【标准答案】 2.

【命题目的】 本题考查了矩阵变换和行列式的计算.

【详细解答】 $B(A-E) = 2E$, $|B||A-E| = 2|E| = 4$

$A-E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $|A-E|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$, $|B|=2$.

【易错辨析】 $|kA_{n\times n}|=k^n|A|$,所以 $|2E|\neq 2|E|$,应该 $|2E|=4|E|=4$.

【延伸拓展】 本题也可先求出矩阵 B,但计算稍复杂.

(5)【标准答案】 $\frac{1}{9}$.

【命题目的】 本题考查了二维随机变量分布计算.

【详细解答】 $P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{9}.$$

【易错辨析】 注意条件中的 X 与 Y 相互独立.

【延伸拓展】

$$P\{\max(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{ 相互独立同分布}}P(X_1\leqslant x)\cdots P(X_n\leqslant x)=\{P(X_1\leqslant x)\}^n$$

$$\begin{aligned}P\{\min(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}&=1-P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>x\}=1-P(X_1>x,\cdots,X_n>x)\\&\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{ 独立同分布}}1-P(X_1>x)\cdots P(X_n>x)\\&=1-\{1-P(X_1\leqslant x)\}\cdots\{1-P(X_n\leqslant x)\}\\&=1-\{1-P(X_1\leqslant x)\}^n.\end{aligned}$$

(6)【标准答案】 2.

【命题目的】 考查方差期望计算.

【详细解答】 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=0$

$$DX=EX^2-[EX]^2=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-2x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2$$

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$,且 $ES^2=DX=2$.

【易错辨析】 记住方差公式 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$,不是 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$. 所以 $ES^2=DX$.

【延伸拓展】 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)=\frac{n-1}{n}DX.$

二、选择题

(7)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了导数与微分的相关概念.

【详细解答】 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$, 所以排除(C)、(D).

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2]$$

$$= \mathrm{d}x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2]$$

因为$\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2] > 0$，所以$0 < \mathrm{d}y \leqslant \Delta y$.（A）为答案.

【易错辨析】 泰勒公式或麦克劳林公式要掌握熟练.

【延伸拓展】 本题可利用凹凸性来解：$f''(x) > 0$，曲线为凹的；$f'(x) > 0$，曲线单增，当$\Delta x > 0$时，$\mathrm{d}y > 0$. 画出曲线草图立即可知$0 < \mathrm{d}y < \Delta y$.

（8）**【标准答案】**（C）.

【命题目的】 本题考查了导数的相关性质.

【详细解答】 $\because \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2} = 1$ 又 $\because \lim\limits_{h\to 0}h^2 = 0$，$\therefore \lim\limits_{h\to 0}f(h^2) = 0$

$f(x)$在$x=0$处连续，所以$f(0)=0$

当$h\to 0$时，$h^2\to 0^+$，于是

$$1 = \lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2} = \lim_{h^2\to 0^+}\frac{f(h^2)-f(0)}{h^2} = f'_+(0).$$（C）为答案.

【易错辨析】 掌握左右导数的相关概念.

【延伸拓展】 ①$h\to 0 \Leftrightarrow h^2\to 0^+$；②若$\lim\frac{\alpha}{\beta} = k$且$\lim\beta = 0$，则$\lim\alpha = 0$.

（9）**【标准答案】**（D）.

【命题目的】 本题考查了级数收敛性的判断.

【详细解答】 方法一：

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2}$收敛$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛.（D）为答案.

方法二：（举反例）

（A）、（B）的反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. 排除（A）、（B）

（C）的反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散. 排除（C）.（D）为答案.

【易错辨析】 对于此种题型，一般可通过常反例排除法解决.

【延伸拓展】 熟记调和级数、p级数、几何级数对于举反例是非常有用的.

（10）**【标准答案】**（B）.

【命题目的】 本题考查了微分方程解的性质.

【详细解答】 $y_1(x) - y_2(x)$是齐次方程$y' + P(x)y = 0$的解，$C[y_1(x) - y_2(x)]$是齐次方程$y' + P(x)y = 0$的通解. 非齐次方程的通解为齐次方程的通解加非齐次方程的特解. 所以$y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$是非齐次方程的通解.（B）为答案.

【易错辨析】 掌握微分方程解的相关性质，即可解题.

【延伸拓展】 无论是一阶、二阶常系数缄性微分方程;线性代数中的线性方程组都有以下结论成立:非齐次方程的通解为齐次方程的通解加非齐次方程的特解.

(11)【标准答案】 (D).

【命题目的】 本题考查了多元函数极值的性质.

【详细解答】 因为$\varphi'_y(x,y)\neq 0$,所以由$\varphi(x,y)=0$可解出$y=y(x)$.

令$Z=f(x,y)=f(x,y(x))$

因为(x_0,y_0)是极值点,所以

$$\left.\frac{dZ}{dx}\right|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0 \qquad (*)$$

所以当$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$(否则,若$f'_y(x_0,y_0)=0$,由(*)知,$f'_x(x_0,y_0)=0$,矛盾).(D)为答案.

【易错辨析】 掌握多元函数求极值的方法.

【延伸拓展】 方法二使用了隐函数存在定理.

(12)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了向量组的线性相关性.

【详细解答】 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关,则存在常数$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零,满足

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

所以 $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$

所以$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots\cdots,A\alpha_s$线性相关.(A)为答案.

【易错辨析】 掌握相关的判别法则.

【延伸拓展】 矩阵的秩不等式:①$r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$;②$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$;③若$A$可逆,$r(AB)=r(B)$;④$r(A_{m\times n}B_{n\times s})\geqslant r(A)+r(B)-n$.

(13)【标准答案】 (B).

【命题目的】 本题考查了矩阵的初等变换.

【详细解答】 由P的表达式,容易求出$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

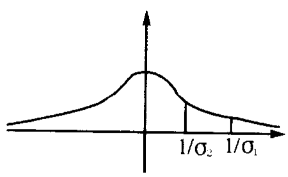
左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换,右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换.PA将A的第2行加到第1行,PAP^{-1}再将所得的矩阵的第一列的-1倍加到第2列,即得到矩阵C.(B)为答案.

【易错辨析】 本题也可反过来,已知C,P的关系,问A与C是如何变换的.

【延伸拓展】 应熟记:左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换,右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换.

(14)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了正态分布的相关性质.



【详细解答】 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1},\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$都服从标准正态分布$N(0,1)$.

$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$

$$= P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right\} > P\left\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right| < \frac{1}{\sigma_2}\right\}$$

由图知：$\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}, \sigma_1 < \sigma_2$. (A) 为答案.

【易错辨析】 熟记密度函数的图形，就能按本题的解法，迅速找到答案.

【延伸拓展】 ①应熟记：$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$；②若 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数，则 $\Phi(0) = \frac{1}{2}, \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

三、解答题

(15)**【命题目的】** 本题考查了函数极限计算.

【思路点拨】 先计算出 $g(x)$ 的表达式，再求其极限.

【详细解答】 (Ⅰ)

$$g(x) = \lim_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{1+xy} - \frac{1-\lim\limits_{y\to+\infty} y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1-\lim\limits_{y\to+\infty} y\cdot\frac{\pi x}{y}}{\arctan x} = \frac{1}{x} - \frac{1-\pi x}{\arctan x}$$

(Ⅱ) $$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1-\pi x}{\arctan x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x\arctan x}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x - x}{x\arctan x} + \lim_{x\to0^+}\frac{\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x - x}{x^2} + \lim_{x\to0^+}\frac{\pi x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{2x} + \pi = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-1-x^2}{1+x^2}}{2x} + \pi = \pi.$$

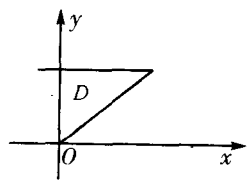
【易错辨析】 掌握极限计算的相关方法.

【延伸拓展】 本题的极限称为二重极限，应注意：$\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{x\to x_0}[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)]$，$\lim\limits_{y\to y_0}[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)]$ 三者都不一定相等.

(16)**【命题目的】** 本题考查了二重积分计算.

【思路点拨】 先对 x 积分，再对 y 积分.

【详细解答】



$$\iint_D \sqrt{y^2 - xy}\,dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y \sqrt{y^2-xy}\,dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{y}\frac{2}{3}(y^2-xy)^{3/2}\Big|_0^y dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{y}y^3 dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{2}{9}.$$

【易错辨析】 该题必须先对 x 积分，再对 y 积分. 否则很难算出结果.

【延伸拓展】 本题也不宜用极坐标变换来计算.

---

(17)【命题目的】 本题考查了利用导数的性质证明函数不等式.

【思路点拨】 构造辅助函数,再利用导数判断其增减性.

【详细解答】 令 $f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x - a\sin a - 2\cos a - \pi\alpha$

$f'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x + \pi,$

$f''(x) = \cos x + \cos - x\sin x - 2\cos x = -x\sin x < 0(x \in (0,\pi))$

所以 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单减. $f'(x) > f'(\pi) = 0(x \in (0,\pi))$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单增. 所以 $f(b) > f(a) = 0$

即 $b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin b + 2\cos a + \pi a.$

【易错辨析】 掌握导数的相关性质.

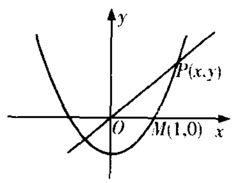
【延伸拓展】 对于积分不等式也可使用类似方法构造辅助函数:将一个常数全部改成变量 x,移项后为辅助函数.

---

(18)【命题目的】 本题考查了一阶微分方程的求解.

【思路点拨】 先列出其满足的一阶微分方程,再求解微分方程.

【详细解答】 $P(x, y)$ 处切线斜率为:$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$



直线 OP 的斜率为:$\dfrac{y}{x}$. 于是得到 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = ax \\ y(1) = 0 \end{cases}$

为带有初始条件的一阶线性方程. $p(x) = -\dfrac{1}{x}, q(x) = ax$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{-1}{x}dx} axdx + C\right) = ax^2 + Cx$$

由 $y(1) = 0$ 得 $0 = a + C, C = -a$

$y = ax^2 - ax$

因为 $a > 0$, 所以如图得:$\begin{cases} y = ax \\ y = ax^2 - ax, \end{cases}$ 得 $x = 0, x = 2$

$$\frac{8}{3} = \int_0^2 [ax - (ax^2 - ax)]dx = a\int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = a\left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}a$$

$a = 2.$

【易错辨析】 本题的一阶线性方程中,一阶导数前的系数为1,所以可以直接代公式;否则,方程要除以一阶导数前的系数,使一阶导数前的系数为1.

【延伸拓展】 一阶线性方程也可用常数变易法求解.

---

(19)【命题目的】 本题考查了幂级数的计算.

【思路点拨】 先计算收敛区域,在收敛域内利用积分法求其级数和.

【详细解答】 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}}\right| = |x|^2 < 1, |x| < 1$$

当 $x=\pm 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\pm 1)^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛，所以收敛域为：$[-1,1]$.

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$，显然 $f(0)=0$

$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$，显然 $f'(0)=0$

$$f''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2}$$

$$f(x)=\int_0^x\left[\int_0^x\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=2\int_0^x\arctan x\mathrm{d}x=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=xf(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),[-1,1].$$

【易错辨析】 注意收敛域端点的收敛性.

【延伸拓展】 对于有无穷多项系数为0的幂级数，不能直接用系数求收敛半径，必须：1）使用后项比前项的绝对值求极限（如本题），或2）用变换（本题用 $x^2=t$），然后可用系数的极限求收敛半径.

---

(20) **【命题目的】** 本题考查了极大无关组的计算.

【思路点拨】 在 $|A|=0$ 的情况下，计算 a 的取值，再分别讨论.

【详细解答】 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以

$$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&-2a&-3a&4-(4+a)(1+a)\\0&a&0&-a\\0&0&a&-a\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&-2a&-3a&-5a-a^2\\0&a&0&-a\\0&0&a&-a\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=a^3(10+a),a=0,a=-10$$

i. $a=0$

极大线性无关组为：α_1

$\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_1$

ii. $a=-10$

$$\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&20&30&-50\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以得极大线性无关组:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;$\alpha_4$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性表示为:$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

【易错辨析】 掌握向量组的变换方法.

【延伸拓展】 极大线性无关组不是唯一的. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$、$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 等都是极大线性无关组.

---

(21)**【命题目的】** 本题考查了特征值与特征向量的相关计算.

【思路点拨】 先计算特征值及其特征向量,再正交化,最后只需计算对角矩阵的幂次.

【详细解答】 (Ⅰ)由条件知0是特征值,相应的特征向量为 I_1,I_2.

取 $I_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$,假设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,则

$$AI_3=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

所以 $\lambda=3$ 为特征值,相应的特征向量为 $\bar\beta_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$.

(Ⅱ)将 I_1,I_2 正交化:

$$\bar\beta_1=I_1,\bar\beta_2=I_2-\frac{(I_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(0,-1,1)^{\mathrm T}-\frac{-3}{6}(-1,2,-1)^{\mathrm T}=\left(-\frac12,0,\frac12\right)^{\mathrm T}$$

将 $\bar\beta_1,\bar\beta_2,\bar\beta_3$ 标准化后得:$\beta_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\beta_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

所以,$Q=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, $Q^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

$Q^{\mathrm T}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$. $A=Q\Lambda Q^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

(Ⅲ)$\Lambda-\frac32E=\begin{bmatrix}\frac{-3}{2}&0&0\\0&\frac{-3}{2}&0\\0&0&\frac32\end{bmatrix}$

$$\left(A-\frac32E\right)^6=\left[Q(\Lambda-\frac32E)Q^{\mathrm T}\right]^6=Q\left(\Lambda-\frac32E\right)^6Q^{\mathrm T}$$

$$=Q\begin{bmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^6 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{3}{2}\right)^6 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{2}\right)^6\end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^6 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{3}{2}\right)^6 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{2}\right)^6\end{bmatrix}.$$

【易错辨析】 本题利用了正交矩阵 $Q^T=Q^{-1}$，于是 $Q^TQ=E$，很容易求出 $(A-\frac{3}{2}E)^6$；如果先求出 $A-\frac{3}{2}E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$，再求 $(A-\frac{3}{2}E)^6$，计算 $(A-\frac{3}{2}E)^6$ 的过程比较繁复.

【延伸拓展】 本题也可用以下方法求解：假设另一个特征值 λ 的特征向量为 $(1,x,y)$，则它应和 I_1,I_2 正交. 立即可求出 x,y. 由 A 的各行元素之和均为 3 可求出特征值 λ 的值.

---

(22)**【命题目的】** 本题考查了二维随机变量分布的相关计算.

【思路点拨】 利用 $f(x)$ 的分段表达式先求出 $F(y)$ 的表达式，再计算 $f_Y(y)$.

【详细解答】 (Ⅰ) $F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$

ⅰ. 当 $y<0$ $\quad F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=0$

ⅱ. 当 $0\leqslant y<1$

$$F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y}$$

ⅲ. 当 $1\leqslant y<4$

$$F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

ⅳ. 当 $y\geqslant 4$

$$F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}} & 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}} & 1\leqslant y<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(Ⅱ) $EX=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{x}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，$EX^2=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$

$$EX^3=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{x^3}{4}\mathrm{d}x=\frac{7}{8}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=EX^3-EX\cdot EX^2=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$$

(Ⅲ)$F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P(X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4)=P(X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2)$

$$=P(-1\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2})=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

【易错辨析】 本题不可能求出联合密度 $f(x,y)$ 及联合分布函数 $F(x,y)$.

【延伸拓展】 必须熟记:数学期望、方差、协方差、相关系数的所有计算公式.

---

(23)**【命题目的】** 本题考查了参数的估计.

【思路点拨】 N 个样本值小于 1 的样本可考虑为 $X_{n_1},X_{n_2},X_{n_3},\cdots,X_{n_N}$.

【详细解答】 (Ⅰ)$EX=\int_0^1\theta x\mathrm{d}x+\int_1^2(1-\theta)x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\theta=\overline{X}$

$\hat{\theta}_{矩估计}=\frac{3}{2}-\overline{X}$

(Ⅱ)因为有 N 个样本值小于 1,所以似然函数为

$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$;$\ln L=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$

$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0,\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.

【易错辨析】 注意密度函数为分布函数,需考虑 x_n 的取值范围.

【延伸拓展】 关于矩估计,经常用到以下三点:1) 用一阶样本原点矩估计总体一阶原点矩(即用样本均值估计总体均值;2) 用二阶样本原点矩估计总体二阶原点矩;3) 用二阶样本中心矩估计总体二阶中心矩(即用$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 估计总体方差).

2006 年经济数学三试卷评析

2006 年经济数学三考点分布表

考点	函数与极限	导数与微分	无穷级数	重积分	微分方程求解	行列式	向量	特征值与特征向量	随机变量及其分布	随机变的数字特征	参数估计
分数	12	28	12	9	13	8	17	13	21	4	13

本试卷微积分部分的试题主要考查了:1. 极限的计算;2. 函数的高阶导数及导数的相关性质;3. 幂级数求和;4. 二重积分计算;5. 微分方程求解. 其中导数的应用、利用导数证明不等式、二重积分计算、复合函数微分为近年来常考题型,微分方程求解今年所占分值较往年有所增加,考生需注意.

本试卷线性代数部分主要考查了:1. 行列式的计算;2. 向量相关性的判别;3. 特征值与特征向量的计算;其中行列式计算和向量相关性的判定属基础题型,也是常考题型,线代部分每年出题的形式都有所不同. 去年大题考的是线性方程解的问题,今年则是考求特征值与特征向量,考生需注意这个特点.

本试卷概率统计部分主要考查了,求随机变量的分布,求随机变量的数字特征、参数估计,其中二随机变量的联合分布是每年的必考题型,参数估计去年考了 4 分,今年则考了大题 13 分,考生也需重点把握.

2005年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题详解、拓展及评析

一、填空题

(1)【标准答案】 2.

【命题目的】 考查了重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

【详细解答】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+1}{2x}\cdot\frac{1}{x}}=2$

【易错辨析】 该题的关键是凑出$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$的极限形式,注意当$x\to 0$时$\frac{2x}{x^2+1}\to 0$.

【延伸拓展】 求含有三角函数的极限常常通过恒等变换凑出重要极限的形式或利用等价无穷小量替换来求解.

---

(2)【标准答案】 $y=\frac{2}{x}$

【命题目的】 本题考查了可分离变量形式的微分方程的求解.

【详细解答】 $xy'+y=0\Rightarrow\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x}\Rightarrow y=c\cdot\frac{1}{x}$,代入$\lambda x=1$,得$C=2$

$\therefore$ 特解为$y=\frac{2}{x}$

【易错辨析】 求出通解后,不忘记利用初始条件确定常数C的值.

【延伸拓展】 本题是求解微分方程的一类基本题型,近年来涉及微分方程求解的题目,多为微分方程的初值问题.

---

(3)【标准答案】 $2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y$

【命题目的】 本题考查二元函数的微分.

【详细解答】 $\mathrm{d}z=z'_x\mathrm{d}x+zy'\mathrm{d}y$

$z'_x=e^{x+y}+xe^{x+y}+\ln(1+y)$

$3y'=xe^{x+y}+\frac{x+1}{1+y}$

$\therefore \mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=z'_x\Big|_{(1,0)}\mathrm{d}x+z'_y\Big|_{(1,0)}\mathrm{d}y=2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y.$

【易错辨析】 先求出z'_x、z'_y,在写微分形式时不要忘记$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$.

【延伸拓展】 注意区分导数与微分,求导数的题目也常与隐含数相联系.本题要求考生掌握多元函数微分.

(4)【标准答案】 $\frac{1}{2}$.

【命题目的】 本题考查了向量组的线性相关.

【详细解答】 $\because$ 向量组线性相关

$$\therefore 0=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\0&0&a-1&a-1\\1&1&0&a-1\\0&1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&2\\0&0&a-1&a-1\\1&1&0&a\\0&1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}2&1&2\\0&a-1&a-1\\1&0&a\end{vmatrix}=-2a(a-1)+(a-1)$$

$$=(a-1)(-2a+1)$$

$\therefore a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$,而 $a\neq 1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

【易错辨析】 在计算向量组所构成矩阵的行列式时容易出错.

【延伸拓展】 四维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$.

(5)【标准答案】 $\frac{13}{48}$.

【命题目的】 本题考查了全概率公式.

【详细解答】 若 $Y=2$,则 X 可能等于2,3,4,由全概公式可得:

$$P\{Y=2\}=P\{Y=2|X=2\}P\{X=2\}+P\{Y=2|X=3\}P\{X=3\}+P\{Y=2|X=4\}P\{X=4\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{13}{48}.$$

【易错辨析】 注意 $P\{Y=2|X=K\}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{4}$.

【延伸拓展】 要求考生熟记全概率公式.

(6)【标准答案】 $a=0.4,b=0.1$.

【命题目的】 考查了概率分布及事件独立的相关知识.

【详细解答】 由概率公布的定义可得:$0.4+a+b+0.1=1$,即 $a+b=0.5$

$P\{X=0\}=0.4+a$

$P\{X+Y=1\}=a+b$

$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a$

$\because \{X=0\}$ 和 $\{X+Y=1\}$ 相互独立.

$\therefore a=(a+b)(0.4+a)=0.5(0.4+a)$