中学数学系列读物

初中代数解题方法和技巧

乔家瑞　李永山　编

科学技术文献出版社

中学数学系列读物

初中代数解题方法和技巧

乔家瑞　李永山　编

科学技术文献出版社

1989

内 容 简 介

本书是中学数学系列读物之一，它是紧密配合初中代数教材编写的解题方法和技巧。文章叙述深入浅出，通俗易懂，能帮助读者系统地归纳和总结常用的解题方法和技巧，从根本上提高分析问题和解决问题的能力；每篇内容都能独立成章，读者可以根据需要选学其中任何一篇。

本书可作为自学青年及在校初中学生学习和复习初中数学的参考书，也可作为数学教师进行教学和课外讲座的参考书。

中学数学系列读物
初中代数解题方法和技巧
乔家瑞　李永山　编
科学技术文献出版社出版
北京印刷二厂印刷
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
*
787×1092毫米　32开本　19印张　408千字
1989年2月北京第一版第一次印刷
印数：1—8000册
社科新书目：217—207
ISBN 7-5023-0627-7/G·164
定价：4.45元

前　言

为了配合中学数学教学，根据教材的具体要求和中学生的实际情况，我们编写了这套中学数学系列读物。它包括《初中代数解题方法和技巧》、《平面几何与立体几何解题方法和技巧》、《平面解析几何解题方法和技巧》、《平面三角解题方法和技巧》和《高中代数解题方法和技巧》等五册。编写这套系列读物的目的在于帮助读者系统地归纳、总结常用的解题方法和技巧，以便逐步积累解题经验，学会科学的思考方法，构成合理的解题思路，从根本上提高分析问题和解决问题的能力。

在编写过程中，我们特别注意了下述几个问题：

1．这套系列读物所选内容完全是根据中学数学教学大纲和教材的要求编写的，但在难度上略有变化。有些内容的难度和教材的要求相仿，只是从不同的侧面进行归纳总结；有些内容的难度则略高于教材的要求。

2．这套系列读物在内容的安排上注意了中学生学习的阶段性，不片面追求解题方法和技巧的完整。例如在《初中代数解题方法和技巧》中，不仅有适合初三同学学习的内容，而且有适合初一和初二同学学习的内容。

3．在阐述每一种解题方法和技巧时，都选择典型例题进行详尽地分析，以揭示它们的精神实质，同时附有一定数量的习题，供读者练习使用。另外，在叙述上注意了深入浅

出，通俗易懂。因此读者就可以通过自学掌握书中的内容。

4．这套系列读物中的每篇内容都能独立成章，读者可以根据自己的需要，选择其中任何一篇进行学习。

这套系列读物可以作为学习和复习中学数学的参考书，也可作为数学教师进行教学和课外讲座的参考书。

在编写这套系列读物过程中，我们参阅了大量的国内外有关资料，但限于我们的水平，错误与不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

《初中代数解题方法和技巧》是中学数学系列读物之一，它是紧密配合初中代数教材编写的解题方法和技巧，可作为学习和复习初中代数的参考书，也可作为数学教师进行教学和课外讲座的参考书。本书由北京师范学院数学系副主任胡杞审校。

编者　1986年8月于北京

目　　录

一、解一次方程组的常用技巧

解二元一次方程组和三元一次方程组的关键是消元，最常见的消元方法是代入法和加减法．如果我们能够根据方程组的结构特征，灵活地应用消元法，就可以避免繁琐的运算，同时能够使解法简捷，提高解题的速度．下面介绍几种解一次方程组的常用技巧：

（一）用加减法化简方程组

例1 解方程组
$$\begin{cases}323x+457y=103, & (1)\\ 177x+543y=897. & (2)\end{cases}$$

分析： 由于各项的数值都比较大，如果直接用代入法或加减法消元求解，运算就非常复杂．观察方程组的结构特征，不难发现，各对应项的系数和都是比较整齐的数值，这样就可以先把两个方程相加，得到一个系数比较简单的方程，再和原方程组中比较简单的方程组成方程组求解．

解： (1)+(2)，得　$500x+1000y=2000$.

$\therefore\quad x+2y=4$.　　(3)

解方程组
$$\begin{cases}177x+543y=897, & (2)\\ x+2y=4. & (3)\end{cases}$$

(2)−(3)×177，得　$189y=189$.

$\therefore\quad y=1$.

将 $y=1$ 代入(3)，得　$x=2$.

∴原方程组的解是 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

例 2 解方程组 $\begin{cases} 361x+463y=-102, & (1) \\ 463x+361y=102. & (2) \end{cases}$

分析： 直接用代入法或加减法消元都不方便．但两个方程中 x，y 的系数和以及差的绝对值都相等，并且常数项的和等于零．所以应该先把方程组化简再消元求解．

解：（1）+（2），得 $824x+824y=0$.

∴ $x+y=0$. （3）

（2）-（1），得 $102x-102y=204$.

∴ $x-y=2$. （4）

解方程组 $\begin{cases} x+y=0, & (3) \\ x-y=2. & (4) \end{cases}$

∴ 原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=abx+1, \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=aby+1. \end{cases} \quad \left(ab\neq 0,\ \frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}\neq ab\right)$$

分析： 将方程组整理后容易发现，两个方程中 x、y 的系数和以及差的绝对值都相等，并且常数项也相等．所以应仿例 2 解这个方程组．

解： 将原方程组整理，得

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{a}-ab\right)x+\frac{y}{b}=1, & (1) \\ \frac{x}{b}+\left(\frac{1}{a}-ab\right)y=1. & (2) \end{cases}$$

（1）+（2），得 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-ab\right)x+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-ab\right)y=2.$

$\because \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq ab,$

$\therefore \quad x+y=\frac{2ab}{a+b-a^2b^2}.$ （3）

（1）-（2），得 $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-ab\right)x-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-ab\right)y=0.$

$\because \quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}\neq ab,$

$\therefore \quad x-y=0.$ （4）

解方程组

$$\begin{cases} x+y=\frac{2ab}{a+b-a^2b^2}, & (3) \\ x-y=0. & (4) \end{cases}$$

$\therefore$ 原方程组的解是

$$\begin{cases} x=\frac{ab}{a+b-a^2b^2}, \\ y=\frac{ab}{a+b-a^2b^2}. \end{cases}$$

（二）联合代入法

在一个方程中，将一部分含未知数的代数式，用另一部分代数式来表示，然后代入其它方程中去，这样就可以消去一部分含有未知数的代数式，这种代入方法就叫做联合代入法．特别是当一个方程中含有另一个方程时，就可以将后一个方程代入前一个方程，从而达到消元或化简的作用．

例1　解方程组
$$\begin{cases}3x+4y=3, & (1)\\ 9x-8y=-1. & (2)\end{cases}$$

分析：如果将方程（2）变形成$9x+12y-8y-12y=-1$，即$3(3x+4y)-20y=-1$．则这个方程中就包含方程（1），那么就可以使用联合代入法，将方程（2）中$3x+4y$换成3，从而可以消去x．

解：由（2），得　$9x+12y-8y-12y=-1$．

$\therefore$　$3(3x+4y)-20y=-1$．　（3）

将（1）代入（3），得　$3\times3-20y=-1$．

$\therefore$　$y=\frac{1}{2}$．

将$y=\frac{1}{2}$代入（1），得　$x=\frac{1}{3}$．

$\therefore$　原方程组的解是
$$\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

例2　解方程组
$$\begin{cases}x+y+z=15, & (1)\\ 2x-3y+2z=5, & (2)\\ x-4y-4z=-40. & (3)\end{cases}$$

分析：在方程组中，较简单的方程是方程(1)，由于方程(1)中各项系数都是1，而方程(2)，(3)中都有两项的系数绝对值相等，因此经过变形就可以用联合代入法达到消元的目的.

解：由(2)，得 $2x+2y+2z-2y-3y=5.$

$\therefore\quad 2(x+y+z)-5y=5.\qquad(4)$

将(1)代入(4)，得 $2\times15-5y=5.$

$\therefore\quad y=5.$

由(3)，得 $x+4x-4x-4y-4z=-40.$

$\therefore\quad 5x-4(x+y+z)=-40.\qquad(5)$

将(1)代入(5)，得 $5x-4\times15=-40.$

$\therefore\quad x=4.$

将 $x=4$，$y=5$代入(1)，得 $z=6$.

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases}x=4,\\ y=5,\\ z=6.\end{cases}$

例3 解方程组 $\begin{cases}x+2y-3z=-36, & (1)\\ 9x+18y+16z=63, & (2)\\ 5x-8y+12z=207. & (3)\end{cases}$

分析：由于方程组中较简单的方程是方程(1)，它们的系数比是1∶2∶(－3).而在方程(2)中，x 与 y 的系数之比是1∶2；方程(3)中，y 与 z 的系数之比是(－2)∶3，这样就可以经过变形，用联合代入法达到消元的目的.

解：由(2)，得 $9x+18y-27z+27z+16z=63.$

$\therefore\quad 9(x+2y-3z)+43z=63.\qquad(4)$

将(1)代入(4)，得 $9\times(-36)+43z=63.$

$\therefore\quad z=9.$

由(3)，得　$5x+4x-4x-8y+12z=207.$

$\therefore\quad 9x-4(x+2y-3z)=207.$　(5)

将(1)代入(5)，得　$9x-4\times(-36)=207.$

$\therefore\quad x=7.$

将 $x=7$，$z=9$代入(1)，得　$y=-8.$

$\therefore$　原方程组的解是 $\begin{cases} x=7, \\ y=-8, \\ z=9. \end{cases}$

例 4　解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1, & (1) \\ 73x+64y+50z=87, & (2) \\ 56x+51y+23z=84. & (3) \end{cases}$$

分析：由于方程组中最简单的方程(1)，各项系数之比是1∶1∶1．但在方程(2)，(3)中，各项系数之间没有任何两项系数之比是1∶1．因此不可能象例2和例3那样，直接消去两个未知数．但使用联合代入法也可以消去同一个未知数，把三元一次方程组转化成二元一次方程组．

解：由(2)，得　$23x+14y+50x+50y+50z=87.$

$\therefore\quad 23x+14y+50(x+y+z)=87.$　(4)

将(1)代入(4)，得　$23x+14y+50\times1=87.$

$\therefore\quad 23x+14y=37.$　(5)

由(3)，得　$33x+28y+23x+23y+23z=84.$

$\therefore\quad 33x+28y+23(x+y+z)=84.$　(6)

将(1)代入(6)，得　$33x+28y+23\times1=84.$

$\therefore\quad 33x+28y=61.$　(7)

解由（5），（7）组成的方程组 $\begin{cases}23x+14y=37, & (5)\\ 33x+28y=61. & (7)\end{cases}$

$\therefore \quad \begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$

将 $x=1$，$y=1$ 代入（1），得　$z=-1$.

$\therefore$　原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=-1.\end{cases}$

（三）换元法

例1　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=6,\\[2ex] \dfrac{x}{8}-\dfrac{5y}{6}=-4.\end{cases}$$

分析：如果用去分母的方法把系数和常数项化成整数，则运算就会变得比较复杂．此时可以利用换元法把系数化成整数，使运算比较简单．

解：设 $\dfrac{x}{8}=A$，$\dfrac{y}{6}=B$.

则原方程组变成 $\begin{cases}4A+2B=6, & (1)\\ A-5B=-4. & (2)\end{cases}$

（1）-（2）×4，得　$A=1$，$B=1$.

$$\therefore \quad \begin{cases}\dfrac{x}{8}=1,\\[2ex] \dfrac{y}{6}=1.\end{cases}$$

因此，原方程组的解是 $\begin{cases}x=8,\\y=6.\end{cases}$

例 2 解方程组 $\begin{cases}3(x+y-1)+2(x-y)=64, & (1)\\4(x+y-1)+5(y-x-3)=78. & (2)\end{cases}$

分析： 本题最好的方法是将第一个方程或第二个方程进行整理，为使用换元法创造有利条件。

解： 由(1)，得 $3(x+y-1)+2(x-y+3)-6=64.$

$\therefore\quad 3(x+y-1)+2(x-y+3)=70. \qquad (3)$

由(2)，得 $4(x+y-1)-5(x-y+3)=78. \qquad (4)$

解由(3)，(4)组成的方程组

$$\begin{cases}3(x+y-1)+2(x-y+3)=70, & (3)\\4(x+y-1)-5(x-y+3)=78. & (4)\end{cases}$$

设 $x+y-1=A$，$x-y+3=B$.

则 $\begin{cases}3A+2B=70,\\4A-5B=78.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}A=22,\\B=2.\end{cases}$

$\therefore\quad \begin{cases}x+y-1=22,\\x-y+3=2.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=11,\\y=12.\end{cases}$

例 3 解方程组

$$\begin{cases}7(2x-3y)-2(10z-3y)+3(3y-8z)=8,\\2(2x-3y)-3(10z-3y)+(3y-8z)=0,\\5(2x-3y)-4(10z-3y)+7(3y-8z)=8.\end{cases}$$

解： 设 $2x-3y=A$，$10z-3y=B$，$3y-8z=C$.

则 $\begin{cases} 7A-2B+3C=8, \\ 2A-3B+C=0, \\ 5A-4B+7C=8. \end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ C=1. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 2x-3y=1, \\ 10z-3y=1, \\ 3y-8z=1. \end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=5, \\ y=3, \\ z=1. \end{cases}$

因此，原方程组的解是 $\begin{cases} x=5, \\ y=3, \\ z=1. \end{cases}$

（四）整体加减法

在方程组各个方程中，除常数项以外，就是含有未知数的项，且有轮换对称的性质．此时就可以把所有方程连加，然后用连加所得的方程，分别代入方程组中每一个方程，就可以求出每个未知数的值．

例1 解方程组

$$\begin{cases} x+y=23, & (1) \\ y+z=25, & (2) \\ z+x=24. & (3) \end{cases}$$

解：（1）+（2）+（3），得 $x+y+z=36.$ （4）

（4）-（1），得 $z=13.$

（4）-（2），得 $x=11.$

(4)-(3)，得 $y=12$.

因此，原方程组的解是
$$\begin{cases} x=11, \\ y=12, \\ z=13. \end{cases}$$

例 2 解方程组
$$\begin{cases} 3x-y-z=2a, & (1) \\ 3y-z-x=2b, & (2) \\ 3z-x-y=2c. & (3) \end{cases}$$

解：(1)+(2)+(3)，得
$$x+y+z=2a+2b+2c. \qquad (4)$$

(4)+(1)，得
$$x=\frac{1}{2}(2a+b+c).$$

(4)+(2)，得
$$y=\frac{1}{2}(a+2b+c).$$

(4)+(3)，得
$$z=\frac{1}{2}(a+b+2c).$$

因此，原方程组的解是
$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(2a+b+c), \\ y=\frac{1}{2}(a+2b+c), \\ z=\frac{1}{2}(a+b+2c). \end{cases}$$

例 3 解方程组
$$\begin{cases} x+y+z=6, & (1) \\ y+z+t=9, & (2) \\ z+t+x=8, & (3) \\ t+x+y=7. & (4) \end{cases}$$