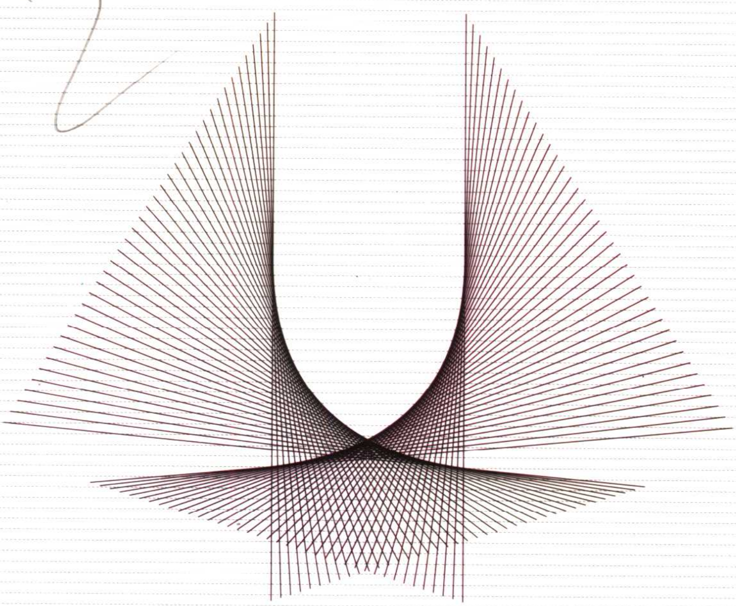
研究生系列规划教材

组合原理及其应用

Principle of Combinatorics and its Applications

孙世新 张先迪 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

电子科技大学研究生系列教材建设项目

组合原理及其应用

孙世新 张先迪 编著

国防工業出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

组合原理及其应用／孙世新，张先迪编著．—北京：国防工业出版社，2006.3
研究生系列规划教材
ISBN 7-118-04263-3

Ⅰ．组… Ⅱ．①孙… ②张… Ⅲ．组合数学-研究生-教材 Ⅳ．O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 153702 号

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）
（邮政编码 100044）
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 710×960 1/16 印张 17 302 千字
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月北京第 1 次印刷
印数：1—4000 册 定价：25.00 元

国防书店：（010）68428422 发行邮购：（010）68414474
发行传真：（010）68411535 发行业务：（010）68472764

序　　言

从 20 世纪 80 年代历时至今的二十多年来，信息电子科学技术的发展令人瞩目。以无线通信和互联网技术为代表的现代信息电子科技极大地促进了经济、社会的发展，并深刻地改变了人类生活。如今，信息电子技术不仅自身已蓬勃发展为强大的新兴产业，它对各传统产业在技术进步上的促进也是有目共睹的。而在国防建设和军事技术的发展中，信息电子技术的重要性更为突出，因为现代化战争最关键的环节就是信息的获取、控制与对抗等电子技术的较量。

正因为迅猛发展的信息电子技术对当今社会发展具有如此重要的意义，因此，国内各高校都极其重视信息电子类相关学科的发展、相关专业的成长和相关专业教学水平的提高。而在这一巨大的努力和付出中，研究生教育质量的提升和研究生教材建设则是至关重要的一环。

电子科技大学正是基于上述认识，近年来加大了电子信息类教材建设的力度。我校的学科专业涵盖了从电子材料、电子器件、电路、信号、控制直到各种电子系统的较为完整的电子信息领域，学校极为重视国内外研究生课程的设置和教材内容的比较研究，并建立了专项基金，用于资助具有一定学术水平的研究生教材的编写与出版。

当然，教材建设也是一项学术性很强的工作。研究生教材既要体现理论上的基础性和系统性，又要尽可能地反映本领域研究的最新成果和进展，要求较高。另一方面，高校的骨干师资力量大多既要承担繁重的科研工作，又要承担大量的教学任务，加之各位教授的专业背景不同，教材的最终质量和使用效果仍需通过实践去检验。因此，我们诚恳希望使用这些教材的各个院校的广大师生直言批评，不吝指正，使我校的教材建设能够越做越好。

电子科技大学

二〇〇五年十月十九日

前　言

组合原理又称组合数学或组合论。它所研究的中心问题是根据一定的规则来安排某些事物的有关数学问题。这些问题包括符合要求的安排是否存在？如果符合要求的安排存在，那么，这样的安排有多少种？怎样构造这些安排？如果给出了最优化标准，又怎样去得到最优安排？

当今，组合原理中的许多问题是数学中的精华。组合原理的应用也涉及到自然科学和社会科学的许多领域。例如，它在计算机科学、编码理论、通信网络、电子工程、实验设计、交通运输、社会经济学、管理科学等领域中都有着广泛的使用价值，特别是在计算机科学中有着重要的应用。这不仅因为它是这门学科的重要基础，更为主要的原因是计算机科学的核心是算法的研究，而组合算法是算法的重要组成部分。例如，用计算机解决问题的大致设计过程为：算法＋数据结构＋编程语言＋编程语言工具。其中，算法是设计的灵魂，于是，算法越精练、高效，编制的程序才越可靠，效率才更高。而算法设计的基础是算法分析，组合原理就是进行组合算法深入分析的最重要的基础。因此，没有组合原理的理论基础，组合算法的深入研究和分析是不可能的。由于以上原因，组合数学在当今世界中受到高度、普遍的重视。

组合原理具有悠久的历史。但是，它的发展壮大还是近几十年的事情，特别是计算机的问世以及计算机的广泛应用，促使了组合原理的蓬勃发展。反过来，由于组合原理的发展壮大，又推动了计算机科学日新月异的进步。可以说，组合原理是计算机科学发展的一个不可分割的组成部分。

组合原理经常使用的方法并不难。但是，要学好组合原理并非易事，既需要一定的数学修养，也需要进行一些相当的训练。

本书较系统、全面地介绍了组合原理中最主要的基本理论、基本问题和所使用的基本方法以及它们的应用。其中包括鸽笼原理、容斥原理、母函数、递归关系等必须掌握的基本内容。

本书叙述详尽，由浅入深，层次分明，逻辑性强，并配有较多的实例和难易程度不同的习题。教师可根据教学要求、课时多少、授课对象（本科生、研究生）灵活选取授课内容。为了在有限的篇幅中包含尽可能多的信息量，书中

一些较繁的证明被省略。

本书的第 6 章和第 7 章，第 1 章的 1.6 节和 1.7 节，第 2 章的 2.4 节、2.5 节和 2.6 节，第 3 章的 3.5 节、3.6 节和 3.7 节，第 4 章的 4.6 节，第 5 章的 5.7 节、5.8 节和 5.9 节以及书中的部分习题由张先迪教授编写，其余由孙世新教授编写。

本书的编写得到了“电子科技大学研究生教材建设基金”的资助，也得到了电子科技大学计算机科学与工程学院以及应用数学学院的支持和帮助，同时卢光辉、刘辉、顾小丰、戴波和汪小平等在本书的编写过程中也做了许多工作，在此一并向他们表示最衷心、最诚挚的感谢。由于编者水平的局限，书中难免存在一些缺点和错误，恳请同行专家及读者提出宝贵意见和建议，使本书得以不断改进和完善。

编　者

2005 年 9 月

目　　录

第 1 章　排列与组合 …… 1

1.1　加法规则和乘法规则 …… 1

1.2　排列 …… 4

1.3　组合 …… 8

1.4　二项式定理 …… 15

1.5　组合恒等式 …… 18

1.6　多项式定理 …… 24

1.7　应用举例 …… 26

习题一 …… 30

第 2 章　鸽笼原理与 Ramsey 定理 …… 35

2.1　鸽笼原理的简单形式 …… 35

2.2　鸽笼原理的一般形式 …… 37

2.3　Ramsey 定理 …… 40

2.4　图论在 Ramsey 定理中的应用 …… 43

2.5　Ramsey 定理的推广和应用 …… 50

2.6　应用举例 …… 53

习题二 …… 58

第 3 章　容斥原理及其应用 …… 62

3.1　容斥原理 …… 62

3.2　重集的 r－组合 …… 72

3.3　错排问题 …… 74

3.4　相对位置上有限制的排列问题 …… 78

3.5　一般有禁位的排列 …… 80

3.6　容斥原理的一般形式 …… 86

3.7　应用举例 …… 89

习题三 …… 94

第 4 章　母函数及其应用 …… 98

4.1 母函数的基本概念 …… 98
4.2 母函数的基本运算 …… 102
4.3 母函数在排列、组合中的应用 …… 105
4.4 母函数在整数拆分中的应用 …… 113
4.5 母函数在组合恒等式中的应用 …… 121
4.6 应用举例 …… 128
习题四 …… 136
第 5 章 递归关系及其解法 …… 139
5.1 递归关系的建立 …… 139
5.2 常系数线性齐次递归关系的解法 …… 143
5.3 常系数线性非齐次递归关系的解法 …… 151
5.4 用迭代法与归纳法求解递归关系 …… 157
5.5 用母函数法求解递归关系 …… 161
5.6 Stirling 数 …… 167
5.7 分配问题 …… 172
5.8 递归关系的一些其他解法 …… 175
5.9 应用举例 …… 184
习题五 …… 196
第 6 章 反演公式及其应用 …… 201
6.1 正规多项式族 …… 201
6.2 Möbius 反演公式及其应用 …… 207
6.3 其他一些反演 …… 213
习题六 …… 216
第 7 章 Pólya 计数理论及其应用 …… 218
7.1 群的概念 …… 218
7.2 置换群 …… 222
7.3 循环指标多项式 …… 229
7.4 Burnside 引理 …… 234
7.5 Pólya 定理 …… 241
7.6 母函数型的 Pólya 定理 …… 246
7.7 应用举例 …… 250
习题七 …… 258
参考文献 …… 261

第 1 章　排列与组合

1.1　加法规则和乘法规则

计数问题是组合数学研究的重要问题之一。而加法规则和乘法规则又是解决计数问题的两个最基本的也是最常用的规则。这两个规则是直观的，其形式上的验证可以用数学得到。

1. 加法规则

设 S 是有限集合，若 $S_i \subseteq S$，$S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$，且当 $i \neq j$ 时，$S_i \cap S_j = \Phi$，则有

$$|S| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |S_i| \tag{1.1.1}$$

特别地，当 $m=2$ 时，有

$$|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

换言之，加法规则可以叙述为：若集合 S 可以分解为互不相交的子集 S_1，S_2，…，S_m 之并，则确定 S 中的事物个数，可以先求出各子集 S_i 中的事物个数，然后相加。对 $m=2$，用生活中的话来说，加法规则可叙述为：假若有互相独立的两个事件 X 和 Y 分别有 k 种和 l 种方法产生，则产生 X 和 Y 的方法数有 $k+l$ 种。

例 1　有一所学校给一名物理竞赛优胜者发奖，奖品有三类：第一类是三种不同版本的法汉词典；第二类是四种不同类型的物理参考书；第三类是两种不同的奖杯。这位优胜者只能挑选一样奖品。试问，这位优胜者挑选奖品的方法有多少种？

解　设 S 是所有这些奖品的集合，S_i 是第 i 类奖品的集合（$i=1$，2，3）。显然 $S_i \cap S_j = \Phi$（$i \neq j$），于是由加法规则有

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{3} S_i\right| = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 3+4+2 = 9$$

也就是说这位优胜者挑选奖品的方法共有 9 种。

例 2　求长为 5 的二进制数的个数，其中要求每个 1 都同另一个 1 相邻。

解 根据题意，满足要求的二进制数可由下面四种情况组成。

(1) 恰有 2 个 1 相邻，它们是 x0011，0x011，x0110，0110x，1100x，110x0，其中 x 可能取 0 或 1。因此，在这种情况下，满足要求的二进制数共有 6 个。

(2) 恰有 3 个 1 相邻，它们是 x0111，01110，1110x，共有 3 个。

(3) 恰有 4 个 1 相邻，它们是 01111，11110，共有 2 个。

(4) 恰有 5 个 1 相邻，它们是 11111，共有 1 个。

以上 4 种情况是相互独立的，故由加法规则知满足要求的二进制数共有

$$6+3+2+1=12 \text{ 个}$$

2. 乘法规则 若 S_i（$i=1, 2, \cdots, m$）为有限集，且 $S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_m=\{(a_1,a_2,\cdots,a_m)\mid a_i\in S_i, i=1,2,\cdots,m\}$，则有

$$|S|=|S_1\times S_2\times\cdots\times S_m|=\prod_{i=1}^{m}|S_i| \tag{1.1.2}$$

特别地，当 $m=2$ 时，有

$$|S|=|S_1\times S_2|=|S_1|\cdot|S_2|$$

换言之，乘法规则可以叙述为：若集合 S 是集合 S_1，S_2，$\cdots$，S_m 的直积，则确定 S 中的事物个数，可以先求出各个集合 S_i 中的事物个数，然后相乘。应当注意，对于 S 中的元 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，它们的各分量是相互独立的。

例 3 从 A 地到 B 地有两条不同的道路，从 B 地到 C 地有四条不同的道路，而从 C 地到 D 地有三条不同的道路。求从 A 地经 B、C 两地到达 D 地的道路数。

解 设 S 为由 A 地经 B、C 两地到达 D 地的道路集合（如图 1.1.1），并设 S_1 为由 A 地到 B 地的道路集合，S_2 为由 B 地到 C 地的道路集合，S_3 为由 C 地到 D 地的道路集合，则有

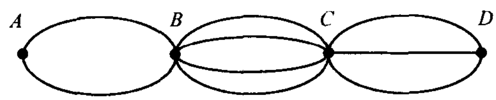


图 1.1.1

$$|S_1|=2,\quad |S_2|=4,\quad |S_3|=3$$

而 $S=S_1\times S_2\times S_3$，由乘法规则有

$$|S|=|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|=2\times4\times3=24$$

即由 A 地经 B、C 两地到达 D 地的道路数为 24。

例 4 由数字 1、2、3、4、5 可以构成多少个所有数字互不相同的四位偶数。

解 由于所组成的四位数是偶数，故个位数只能选取数字 2 或 4，因此个位数只有两种选择方法。

又由于要求四位数字互不相同，故当个位数选定后，在剩下的 4 位数字中，选十位数就只有 4 种方法。当个位数和十位数选定后，在剩下的 3 位数字中，选择百位数就只有 3 种方法。当个位数、十位数和百位数选定后，在剩下的 2 位数字中选择千位数只有两种方法。于是，由乘法规则知，四位数字互不相同的偶数个数是

$$2\times4\times3\times2=48$$

通常，乘法规则比加法规则更加复杂，但乘法规则更加有用。一般情况下，加法规则和乘法规则会同时使用在同一个问题中。

例 5 求出从 7 个数学系的学生，8 个化学系的学生，105 个经济系的学生和 21 个物理系的学生中选出两个不同专业的学生的方法数。

解 由乘法规则有

选一个数学系和一个化学系的学生的方法数为 $7\times8=56$。

选一个数学系和一个经济系的学生的方法数为 $7\times105=735$。

选一个数学系和一个物理系的学生的方法数为 $7\times21=147$。

选一个化学系和一个经济系的学生的方法数为 $8\times105=840$。

选一个化学系和一个物理系的学生的方法数为 $8\times21=168$。

选一个经济系和一个物理系的学生的方法数为 $105\times21=2\ 205$。

又由加法规则得

$$56+735+147+840+2\ 205+168=4\ 151$$

因此，符合题目要求的方法数为 4 151 种。

在实际中，大量的计数问题分为以下两大类。

(1) 计算事物的有序安排或有序选择数。这又分为如下两种情况：

a. 不允许任何事物重复；

b. 允许事物重复。

(2) 计算事物的无序安排或无序选择数。这又分为如下两种情况：

a. 不允许任何事物重复；

b. 允许事物重复。

第一类就是 1.2 节要讨论的排列问题，第二类就是在 1.3 节中要讨论的组合问题。

如何区别事物的重复和不重复呢？通常采用集合和重集的安排或选择的说法来加以区别。

集合的概念大家都很熟悉，它的元素一定是不相同的。而重集也类似于集

合，只是它的元素可以是相同的。

如集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 具有4个不同的元素，但重集 $B=\{a,a,b,b,b,c,d,d,d,d,d\}$ 则有11个元素，2个 a，3个 b，1个 c 和5个 d。通常把 B 简记为 $B=\{2\cdot a,3\cdot b,1\cdot c,5\cdot d\}$。一般有

$$B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$$

式中　k_i（$i=1$，2，…，n）——重集 B 的元素 b_i（$i=1$，2，…，n）的重复数，当没有关于元素重复的限制时，可以允许重集中的元素出现无限多次，即 k_i 可以是∞。

1.2 排　列

求出根据已知的条件所能作出的不同排列的种数，这就是研究排列问题的主要目的。按照元素的排列方式，排列可分为三种：线排列、圆排列、重排列。

1. 线排列

定义 1.2.1　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是具有 n 个元素的集合，r 是正整数。从这 n 个不同的元素里取 r 个按照一定的次序排列起来（$r\leqslant n$），称为集合 A 的 r－排列。其排列数记为 $P(n,r)$。换言之，A 的 r－排列为 A 的 r 有序子集。

另外，为了处理问题的方便，定义

$$P(n,r)=\begin{cases}1,n\geqslant r=0\\0,n<r\end{cases}$$

例如，集合 $A=\{a,b,c\}$，则集合 A 有6个2－排列：ab，ac，ba，bc，ca，cb 和6个3－排列：abc，acb，bac，bca，cab，cba，故有

$$P(3,2)=6,\qquad P(3,3)=6$$

定理 1.2.1　对于正整数 n 和 r，$r\leqslant n$，有

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

证明　在构造集合 A 的 r－排列时，可以从集合 A 的 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任选一个元素作为排列的第一项，这可以有 n 种选法。当第一项选定后，又可以从剩下的 $n-1$ 个元素中任选一个元素作为排列的第二项，这又有 $n-1$ 种选法。照此下去，只要选定了前 $r-1$ 项，则就有 $n-r+1$ 种选法来选择排列的第 r 项。由乘法规则，这 r 个选项可以有 $n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种选法。故有

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

注意，当 $r=n$ 时，则称 A 的 n－排列为全排列，于是由定理 1.2.1 有

$$P(n,n)=n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!$$

推论 1.2.1 当 $n\geqslant r\geqslant2$ 时，有

$$P(n,r)=nP(n-1,r-1)$$

证明 在集合 A 的 n 个元素中，任何一个元素都可以排在它的 r－排列的首位，故首元有 n 种取法。当首元取定后，其他位置上的元正好是从 A 的另 $n-1$ 个元素中取 $r-1$ 个的排列，因此有 P（$n-1$，$r-1$）种取法。由乘法规则得

$$P(n,r)=nP(n-1,r-1)$$

推论 1.2.2 当 $n\geqslant r\geqslant2$ 时，有

$$P(n,r)=rP(n-1,r-1)+P(n-1,r)$$

证明 当 $r\geqslant2$ 时，把集合 A 的 r－排列分为两大类：一类含有 A 中的某固定元，比如是 a_1；另一类不含 a_1。如果先从 $A\setminus\{a_1\}$ 中选取 $r-1$ 个元进行排列，共有 $P(n-1,r-1)$ 个这样的排列。对于每一个上述排列，可将 a_1 放入而得到第一类排列。由于对任一上述排列，a_1 都有 r 种放入方法，因此第一类排列共有 $r\cdot P(n-1,r-1)$ 个，第二类排列实质上是 $A\setminus\{a_1\}$ 的 r－排列，因此共有 $P(n-1,r)$ 个，再由加法规则有

$$P(n,r)=rP(n-1,r-1)+P(n-1,r)$$

例 1 由数字 1、2、3、4、5、6 可以构成多少个数字互不相同的四位数。

解 由于所有的四位数字互不相同，故一个四位数就是集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个 4－排列，因此符合题目要求的四位数个数是

$$P(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=360$$

例 2 将具有 9 个字母的单词 FRAGMENTS 进行排列，要求字母 A 总是紧跟在字母 R 的右边，问有多少种这样的排法？

解 由于 A 总是跟在 R 的右边，故这样的排列可以看成是具有 8 个元素的集合 {F,RA,G,M,E,N,T,S} 的一个全排列，其个数为

$$P(8,8)=8!=40\ 320$$

例 3 求有多少个 5 位数，每位数字都不相同，不能取 0，且数字 7 和 9 不相邻？

解 由于所有的 5 位数字互不相同，且不能为 0，故一个 5 位数就是集合 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的一个 5－排列，其排列数为 $P(9,5)$，其中 7 和 9 相邻排列数为

$4\times2\times P(7,3)$，故满足题设要求的 5 位数个数为

$$P(9,5)-4\times2\times P(7,3)=15\ 120-1\ 680=13\ 440$$

例 4 12 个人从左至右排成一排，其中张三不能排在队首，也不能排在队尾，问有多少种排法？

解 12 个人排成一排共有 $P(12,12)$ 种排法，然后减去张三排在队首和队尾的排法共 $2P(11,11)$ 种，即得满足题设要求的排法为

$$P(12,12)-2\,P(11,11)=10\times11!$$

由于上面的排列是把一些元素排成一条直线，因此，通常把这种排列也叫做线排列。区别于线排列的圆排列，它是把一些元素排成一个圆圈的排列。

2. 圆排列

定义 1.2.2 从集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的 n 个不同元素中取出 r 个元素按照某种顺序（如逆时针）排成一个圆圈，称这样的排列为圆排列（或称循环排列）。

需要注意的是若一个圆排列经旋转后可得另一个圆排列，则这两个圆排列是相同的。

定理 1.2.2 集合 A 中的 n 个元素的 r 圆排列的个数为

$$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!)$$

证明 由于把一个圆排列旋转所得到的另一个圆排列视为相同的圆排列，因此排列 $a_1a_2\cdots a_r$，$a_2a_3\cdots a_ra_1$，$a_3a_4\cdots a_ra_1a_2$，$\cdots$，$a_ra_1a_2\cdots a_{r-1}$在圆排列中是同一个，即一个圆排列可以产生 r 个线排列，而总共有 $P(n,r)$ 个线排列。故圆排列的个数为

$$P(n,r)/r=n!/(r(n-r)!)$$

例 5 有 8 人围圆桌就餐，问有多少种就座方式？如果有两人不愿坐在一起，又有多少种就座方式？

解 由定理 1.2.4 知，8 人围圆桌就座一共有 $8!/8=7!$ 种就座方式。

又由于两人不愿坐在一起，设这两个人为甲和乙，当甲和乙坐在一起时，相当于 7 个人围圆桌而坐，其就座方式为 $7!/7=6!$，而甲和乙坐在一起时，又有两种情况，或者甲坐在乙的右面，或者甲坐在乙的左面，这样一来，甲和乙坐在一起时共有 $2\times6!$ 种就座方式。因此，甲和乙不坐在一起时的就座方式的总数为

$$7!-2\times6!=5\times6!=3\ 600$$

例 6 4 男 4 女围圆桌交替就座有多少种方式？

解 显然，这是一个圆排列问题。先让 4 个男的围圆桌而坐，由定理 1.2.4 知共有 $4!/4$ 种就座方式。然后加入一个女的进去就座就有 4 种方式，

加入第二个女的又有 3 种方式，加入第三个女的又有 2 种方式，加入第四个女的只有 1 种方式。由乘法规则知，4 男 4 女围圆桌交替就座的方式数为

$$(4!/4)\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 144$$

3. 重排列

上面讨论了从集合 A（A 中的元素是互不相同的）中选 r 个元素进行排列，在每种排列中每个元素至多只出现一次的情况。现在考虑元素允许重复出现的情况，即考虑在重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$ 中选 r 个元素进行的排列。

定义 1.2.3 从重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$ 中选取 r 个元素按照一定的顺序排列起来，称这种 r－排列为重排列。

定理 1.2.3 重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的 r－的排列个数为 n^r。

证明 构造集合 B 的 r－排列可用如下方法。

在选择 r－排列的第一项时，可以从 n 个元素中任选一个，因此有 n 种选法。在选择 r－排列的第二项时，由于可以重复选取，仍有 n 种选法……。同理，在选择这样排列的第 r 项时仍有 n 种选法。由乘法规则可求得 r－排列的数目为 n^r。

这个定理也可叙述为：在一个具有 n 个不同元素的集合 B 中，每一个元素都可以重复选取无限多次的 r－排列的个数等于 n^r。同时，若 B 的 n 个不同元素的重复数都至少是 r，则定理的结论仍然成立。

例 7 由 1、2、3、4、5、6 这几个数字能组成多少个五位数？又可组成多少个大于 34 500 的五位数？

解 一个五位数，数字可以重复出现，这是一个重排列问题。

由于五位数的每一位在重集 $B=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\infty\cdot 3,\infty\cdot 4,\infty\cdot 5,\infty\cdot 6\}$ 中有 6 种选择，由定理 1.2.5 知，这 6 个数字可以组成 6^5 个五位数。

又大于 34 500 的五位数可由下面的三种情况组成。

(1) 万位上的数字是 4、5 或 6，其余四位上的数字中的每一个数字都可以从重集 B 中选取 6 个数字，由乘法规则知，共有 $3\cdot 6^4$ 个这样的数。

(2) 万位数是 3，千位上是 5 或 6，其余三位上的数字中的每一个都可以从重集 B 中选取 6 个数字，共有 $2\cdot 6^3$ 个这样的数。

(3) 万位和千位上的数字分别是 3 和 4，百位上的数字是 5 或 6，其余两位上的数字中的每一个都可以从重集 B 选取 6 个数字，故共有 $2\cdot 6^2$ 个这样的数。由加法规则知，大于 34 500 的五位数的个数为

$$3\cdot 6^4+2\cdot 6^3+2\cdot 6^2=4\ 392$$

定理 1.2.4 重集 $B=\{n_1\cdot b_1,n_2\cdot b_2,\cdots,n_k\cdot b_k\}$ 的全排列的个数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

式中 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$。

证明 将 B 中的 n_i 个 b_i 分别赋予上标 1，2，…，n_i，即 $b_i^1, b_i^2, \cdots, b_i^{n_i} (i = 1,2,\cdots,k)$。这样一来，重集 B 就变成具有 $n_1 + n_2 + \cdots + n_i = n$ 个不同元素的集合 $A = \{b_1^1, b_1^2, \cdots, b_1^{n_1}, b_2^1, b_2^2, \cdots, b_2^{n_2}, \cdots, b_k^1, b_k^2, \cdots, b_k^{n_k}\}$，显然，集合 A 的全排列个数为 $n!$。

又由于 n_i 个 b_i 分别赋予上标 1，2，…，n_i 种，于是对于重集 B 的任何一个全排列，都可以产生集合 A 的 $n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!$ 个排列（由乘法规则），故重集 B 的全排列个数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

例 8 由 4 面红旗、3 面蓝旗、2 面黄旗、5 面绿旗可以组成多少种由 14 面旗子组成的一排彩旗？

解 这是一个重排列问题，它是求重集（4·红旗，3·蓝旗，2·黄旗，5·绿旗）的全排列的个数，由定理 1.2.6 知，组成一排彩旗的种类数为

$$\frac{14!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 5!}$$

例 9 用字母 A、B 和 C 组成五个字母的符号，要求在每个符号里，A 至多出现 2 次，B 至多出现 1 次，C 至多出现 3 次，求此类符号的个数。

解 这也是一个重排列问题。根据分析，符合题目要求的符号只有三种情况：$\{2\cdot A, 0\cdot B, 3\cdot C\}$，$\{1\cdot A, 1\cdot B, 3\cdot C\}$ 和 $\{2\cdot A, 1\cdot B, 2\cdot C\}$。由定理 1.2.6 知，各种情况对应的符号个数分别为

$$\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 3!}, \frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!} \text{和} \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}$$

由加法规则知，此数符号的个数为

$$\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 3!} + \frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!} + \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = 60$$

1.3 组　合

求出根据已给条件所能作出的不同组合的种数，这就是研究组合问题的主要目的。

定义 1.3.1 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是具有 n 个元素的集合，r 是非负整

数。从这 n 个不同的元素里取 r 个且不考虑次序组合起来（$r \leqslant n$），称为集合 A 的 r - 组合。换句话说，A 的 r - 组合是 A 的 r - 无序子集。用 $C(n,r)$ 或 $\binom{n}{r}$ 表示集合 A 的 r - 组合的个数。另外，为了使用方便，定义

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \begin{cases} 1, n \geqslant r = 0 \\ 0, n < r \end{cases}$$

定理 1.3.1 对于 $r \leqslant n$，有

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证明 从 n 个不相同的元素里取 r 个元素的组合个数为 $C(n,r)$。而 r 个元素可以组成 $r!$ 个 r - 排列，也就是说一个 r - 组合对应 $r!$ 个 r - 排列。于是 $C(n,r)$ 个 r - 组合就对应 $r!C(n,r)$ 个 r - 排列，这实际上就是从 n 个元素中选取 r 个元素组成的 r - 排列数 $P(n,r)$，因此有 $r!C(n,r) = P(n,r)$。所以

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

推论 1.3.1
$$C(n,r) = C(n,n-r) \tag{1.3.1}$$

证明 事实上，从 n 个不同的元素中选出 r 个元素，就有 $n-r$ 个元素没有被选出。因此选出 r 个元素的方式数等于选出 $n-r$ 个元素的方式数，即 $C(n,r) = C(n,n-r)$。

推论 1.3.2 （**Pascal 公式**）
$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1) \tag{1.3.2}$$

证明

$$\begin{aligned} C(n,r) &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} \\ &= C(n-1,r) + C(n-1,r-1) \end{aligned}$$

推论 1.3.2 也可用组合分析的方法论证：在集合 A 的 n 个元素中固定一个元素，不妨设为 a_1，于是，从 n 个元素中取 r 个元素的组合可分为以下两类。

(1) r 个元素中包含 a_1。这可以从除去 a_1 的 $n-1$ 个元素中取 $r-1$ 个元素的组合，然后将 a_1 加入而得到，其组合个数为 $C(n-1,r-1)$。