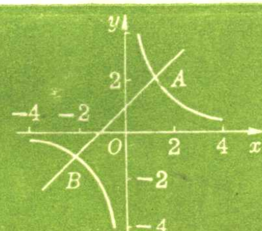
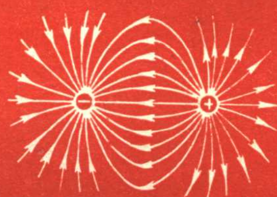
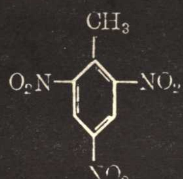
·中学生课外读物丛书·

数学世界

坐标·直线和圆方程







汪绳祖 陈肇曾

上海科学技术出版社

中学生课外读物丛书

数学世界

坐标 · 直线和圆方程

汪绳祖　陈肇曾

上海科学技术出版社

中学生课外读物丛书
数 学 世 界
坐标·直线和圆方程
汪绳祖 陈肇曾
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6.375 字数 140000
1990年 9月第1版 1990年 9月第1次印刷
印数1— 6,800
ISBN7—5323—1474—X/G·221
定价：2.00元

编辑出版说明

本《丛书》是一套为广大中学生提供的课外读物.第一批先编辑出版数学、物理、化学三门学科的分册. 目的为了引导学生开发思维,拓广知识视野,充实数、理、化各门学科本身的知识及这些知识在实际中的应用. 但所涉及的基本知识不超过全日制中学数、理、化教学大纲所规定的范围.

本《丛书》的特点是知识性与趣味性相结合. 注意揭示数、理、化知识本身内在的联系与规律;重视联系实际应用,联系邻近学科,使学生学到的知识能融会贯通;同时适当介绍学科领域里的新进展,以帮助学生开阔眼界.

本《丛书》的体例不拘泥于章节编排, 而以专题篇目的面貌出现. 各篇内容既有相对联系的系统性, 又有相对的独立性,既体现生动活泼,又注意科学严谨.适合于广大初、高中学生阅读.

在组织编写本《丛书》的过程中, 得到了上海市教育局教研室有关同志的热忱指教和协助,在此致以衷心谢意.

由于编写出版时间仓猝,《丛书》中的缺点及不当之处在所难免,欢迎广大读者提出批评指正.

编者的话

解析几何是一门用代数方法研究几何图形性质的学科，它是借助于坐标系的建立，使点与数（坐标）联系起来；同时把平面几何图形看成是平面曲线动点的轨迹，从而使曲线（图形）与代数方程联系起来．利用这两个联系，通过坐标系与解析式把几何问题转化成代数问题．

为了使高中同学进一步领会解析几何的基本思想方法与开拓知识的视野，我们编写了《坐标·直线和圆方程》这本小册子．本书的具体内容大致可以分成四类：一类是介绍平面坐标系的基础知识，包括直角坐标系、斜坐标系、仿射坐标系与极坐标系；另一类是介绍由于坐标系的建立而产生的一种新的数学方法——解析法，包括坐标系里的几个基本公式，解析法证题的各种应用；再一类是介绍运用解析几何的基本思想研究直线与圆的方程以及它们的性质；最后一类是介绍解析几何的两个基本课题：由方程画曲线、由曲线的几何条件建立曲线的方程．这些内容基本符合中学数学教学大纲的要求，与现行课本的教学内容同步展开，并有一定的延伸与拓广．本书中所介绍的斜坐标系、仿射坐标系以及在这些坐标系里的两点距离公式、定比分点公式、三角形面积公式、斜率公式等知识，虽然不在现行课本中出现，但它们与直角坐标系的有关知识基本一致．因此不会增加同学的额外负担，反而会促进同学们加深对这些知识的理解，进一步熟悉解析几何的基本

解题思路和方法，提高自己综合运用这些知识的能力。

本书不仅可以作为高中同学的课外读物，也可供中学数学教师、对数学有兴趣的其他读者的阅读与使用。

由于作者水平有限，疏漏和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

记于1988年冬

目　录

一、几种坐标系

1．直角坐标系［ 1 ］ 2．斜坐标系［ 3 ］ 3．向量与平面仿射坐标系［ 9 ］ 4．极坐标系［ 16 ］ 5．坐标通则［ 24 ］

二、几个基本公式

1．两点距离公式［ 28 ］ 2．定比分点公式［ 33 ］ 3．三角形面积公式［ 40 ］ 4．斜率公式［ 48 ］

三、直线和圆

1．直线方程［ 64 ］ 2．圆方程［ 92 ］ 3．直线和圆的位置关系、圆的切线［ 104 ］

四、曲线和方程

1．曲线和方程［ 113 ］ 2．由曲线的方程讨论曲线的性质［ 121 ］ 3．由曲线求方程［ 131 ］ 4．两曲线的交点［ 155 ］

五、解析法证题

1．解析法证题的基础知识［ 163 ］ 2．解析法证题的应用［ 172 ］

思考题答案或提示

〔一〕

几种坐标系

1 直角坐标系

学习解析几何的知识是离不开坐标系的．坐标系的种类是很多的，其中最常见的是直角坐标系．直角坐标系是建立在有向直线、有向线段概念基础上的．

对大家来说，有向直线并不陌生，初中代数里的数轴就是一条有向直线，通常把规定了正方向的直线叫做有向直线．把规定了起点和终点的线段叫做有向线段．起点为A、终点为B的有向线段用 $\overline{AB}$ 表示．显然，$\overline{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 是两条方向相反的有向线段．

选定一条线段作长度单位，我们可以量出有向线段$\overline{AB}$的长度，用符号 $|AB|$ 表示．如果有向线段在有向直线 l 上(或与 l 平行)．那么它的方向可能与 l 同向或与 l 异向，根据 $\overline{AB}$ 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数叫做有向线段 $\overline{AB}$ 的数量(或数值)，用AB表示．显然，$AB=-BA$．

利用有向线段数量的概念，可以得到数轴上点的坐标概念．数轴上点P的坐标 x_p 规定为以原点为起点，以 P 为终点的有向线段 $\overline{OP}$ 的数量，即 $x_p=OP$．如果在同一数轴上又

有一点 Q，则有向线段 $\overline{PQ}$ 的数量 $PQ=x_Q-x_P$，它的长度

$$|PQ|=|x_Q-x_P|.$$

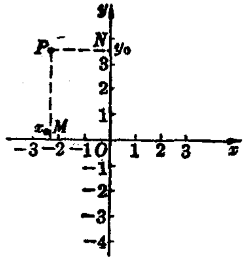


图 1·1

平面直角坐标系实际上是由两条原点重合在一起，互相垂直的数轴来组成的，这两条数轴分别叫做 x 轴（横轴）与 y 轴（纵轴），如图 1.1 所示．在直角坐标系 xOy 所在的平面内（通常叫做坐标平面）任一点 P 的坐标是这样规定的：若 P 在 x 轴、y 轴上的射影为 M、N，M、N 点分别在 x 轴、y 轴上的坐标为 x_0、y_0，则有序实数对 (x_0, y_0) 叫做点 P 在 xOy 坐标系中的坐标．x_0 叫做点 P 的横坐标，y_0 叫做点 P 的纵坐标．这样定义了点的坐标之后，平面上的点与有序实数对这两个集合之间是一一对应的。

对于直角坐标系中点的坐标，要特别注意一些特殊点的坐标。

坐标轴上点的坐标 (x, y) 满足 $xy=0$，其中 x 轴上的点的纵坐标为零，记作 $(x, 0)$．y 轴上点的横坐标为零，记作 $(0, y)$。

两条象限角平分线上的点的坐标 (x, y) 满足 $x^2=y^2$，其中第Ⅰ、Ⅲ象限角平分线上的点记为 (x, x)，第Ⅱ、Ⅳ象限角平分线上的点记为 $(x, -x)$．

还要注意对称点的坐标间的关系：点 $P(a, b)$ 关于 x 轴对称点的坐标是 $(a, -b)$；关于 y 轴对称点的坐标是 $(-a, b)$；关于Ⅰ、Ⅲ象限角平分线对称点的坐标是 (b, a)；关于Ⅱ Ⅳ象限角平分线对称点的坐标是 $(-b, -a)$．

2 斜坐标系

在解析几何中，除了直角坐标系外，还有一些其它类型的坐标系，斜坐标系就是其中之一．为了使读者对斜坐标系有一个直观的认识，我们先从一个具体例子谈起．

塔塔利亚（Tartaglia，Nicolo，约1499～1557年）是十六世纪意大利数学家。代数中的一般三次方程求解公式，据传是他第一个推导出来的．据数学史记载，他曾研究过这样一个趣味数学问题．

有一个装满8000克油的油罐，和两只分别可装5000克和3000克的空瓶．现在要将油罐里的油，利用这两只瓶倒来倒去，平分为两个4000克．试问应该怎样倒，才能达到上述要求？（假定在倒进倒出时，油是没有损耗的）。

这位数学家对这个问题提出的解法是：

(1) 先从油罐里倒3000克油装满小瓶；

(2) 把小瓶里的3000克油倒入大瓶；

(3) 再从油罐里倒3000克油装满小瓶（这时油罐里还剩2000克油）；

(4) 把小瓶里的油倒满大瓶（大瓶里已有3000克，要装满5000克还需倒入2000克，所以倒满大瓶后小瓶里还剩下1000克油）；

(5) 把大瓶里5000克油倒还油罐（这样，油罐里就有7000克油）；

(6) 把小瓶里剩下的1000克油倒入大瓶；

(7) 再从油罐里倒 3000 克油装满小瓶(这时油罐里剩下 4000 克油);

(8) 最后,把小瓶里的 3000 克油倒入大瓶(这时大瓶里也装有 4000 克油了).

至此,经过八个步骤,油罐和大瓶各装 4000 克油,达到了平分 8000 克油的要求.

上面这种解法,好象完全是"凑"出来的. 那末,有没有比它更简单的办法呢?再进一步问:对于这类问题是否有更一般化的解法呢? 答案是肯定的. 这里向读者介绍一位数学家在1939年想出来的一个非常巧妙的解法——弹子盘法.

设想有一个内角为60°的平行四边形弹子盘,它的一边长为 5 个单位(表示一只可装 5000 克油的大瓶),另一边长为3个单位(表示一只可装 3000 克油的小瓶). 为了便于看出在此盘内打弹子时,弹子的撞击线路,不妨将此盘划分为若干个等边三角形,并在各边上注明长度单位(图1.2).

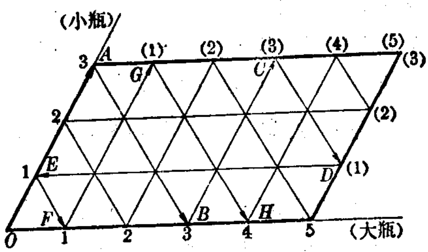


图 1·2

现在开始打弹子. 从左下角 O 点开始,沿着边长为 3 个单位的那一条边打,这样弹子就到达了图 1.2 中的 A 点,此点坐标为(0,3),它表示的意思是:从油罐内倒出3千克油装满

小瓶，而大瓶里未装一滴油（即装的油是0千克）.

弹子撞着了壁，就要碰回来. 碰回来的路线类似于光线的反射，按照入射角等于反射角的原理（这里入射角和反射角都是30°），弹子就从A点到达图中B点. B点的坐标为(3,0)，它表示的意思是：把小瓶里的3000克油倒入大瓶，这时，大瓶里有3000克油，小瓶里没有油（即装的油是0千克）. 由此，我们很容易看到：第一个坐标是大瓶里装油的数量，第二个坐标是小瓶里装油的数量.

接下来，读者可以类似地得到弹子撞击在各边上的位置，它们的坐标分别为：$C(3,3)$、$D(5,1)$、$E(0,1)$、$F(1,0)$、$G(1,3)$和$H(4,0)$. 到达H点时，大瓶中有4000克油. 由于油罐中共有8000克油，所以这时油罐中还剩下4000克油，达到了平分8000克油的目的.

如果把A、B、C、D、E、F、G、H各点的坐标与数学家塔塔利亚解此题时提出的八个步骤作一比较，可以发现这些坐标数量正是每个步骤里大瓶与小瓶的装油重量.

在打弹子时，如果换一种打法，即从左下角O点开始沿着边长为5个单位长度的一边打去，然后观察弹子撞击经过的路线，读者不难得出弹子碰撞在各边上的位置分别为：(5,0)、(2,3)、(2,0)、(0,2)、(5,2)、(4,3)和(4,0). 最后一点(4,0)就是图中H点（这时大瓶装有4000克油，油罐中也有4000克油）. 这里共有七个点. 利用这七个点的坐标，可以确定相应的倒油的七个步骤. 换句话说，与数学家塔塔利亚的解法相比，还减少了一个步骤. 而这种七步解法正是这个问题的最优解. 要使此题的解题步骤再少是不可能的. 因此，采用这种"弹子盘法"不仅能比较容易地得到问题的解法，

而且还能找出它的最优解.

用"弹子盘法"解决上述趣味数学问题是巧妙的，其关键是弹子碰撞弹子盘的边时的位置，即碰撞点的坐标．这个坐标，在形式上与直角坐标系中点的坐标是一致的：都是一对有序实数对．所不同的是在直角坐标系中，两条坐标轴的夹角是 90°，而在图 1.2 中，两条坐标轴（即弹子盘上标有长度单位的两条边）的夹角是 60°．它们确定点的坐标的方法也是类似的：过点分别作坐标轴的平行线（这些平行线组成了坐标网），平行线与坐标轴（数轴）上交点的数量，就是点的坐标．所不同的是：直角坐标系里的坐标网是正方形（有时可以是矩形），而图 1.2 中的坐标网是平行四边形。象前面利用图 1.2 确定点的位置的方法，就是通常所说的斜坐标系．

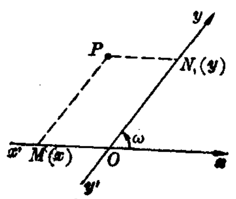


图 1·3

在平面内画两条有公共原点 O 的数轴 $x'x$ 和 $y'y$（图 1.3），它们的夹角为 $\omega(\omega\neq 90°)$，$x'x$ 通常画成水平的，叫做 x 轴或横轴（有时也叫第一轴），取向右方向为正方向；$y'y$ 叫做 y 轴或纵轴（有时也叫做第二轴）取向上的方向为正方向。两条数轴上的单位长度一般取相同的．x 轴、y 轴通称为坐标轴．这样，我们就说在平面内建立了斜（交）坐标系 xOy．ω 叫做坐标角．

显然，当坐标角 $\omega=90°$ 时，斜坐标系就转化为直角坐标系．

与直角坐标系相类似，在平面上建立斜坐标系之后，对于平面内任意一点 P，也有一对有序实数对和它对应：过点 P 作

坐标轴的平行线 PM 和 PN，分别交 x 轴于 M、交 y 轴于 N，M、N 在两坐标轴上的坐标分别为 x,y，那么点 P 就与一对有序的实数 (x,y) 相对应(图 1,3)；反之，给定一对有序实数 (x,y)，在斜坐标平面内也就确定一点 P，称 x 为点 P 的横坐标、y 为点 P 的纵坐标，合起来称为点 P 的斜坐标．记作 $P(x,y)$．

在斜坐标系里，各象限中点的坐标的符号，以及坐标轴上点的坐标的特点与直角坐标系完全一致，可以归结如表 1.1：

表 1.1

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	x 轴	y 轴
横坐标	+	−	−	+		0
纵坐标	+	+	−	−	0	

下面研究直角坐标系与斜坐标系之间的互换关系．

如图1.4，设直角坐标系和坐标角为 ω 的斜坐标系有相同的原点和横轴，它们所取的长度单位也相同．如果点 P 的直角坐标为 (X,Y)，斜坐标为 (x,y)．过 P 点作 y 轴的平行线交 x 轴于 M；过 P 点作 Y 轴的平行线交 X 轴于 M'，则 $\angle PMM'=\omega$．

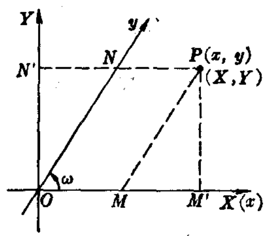


图 1·4

$$\therefore\quad X=OM'=OM+MM'=x+MP\cos\angle PMM'$$
$$=x+y\cos\omega;$$
$$Y=PM'=MP\sin\angle PMM'=y\sin\omega.$$

同理可证，当 P 点在其余象限时，点 P 的直角坐标 (x, y) 与斜坐标 (x,y) 也具有关系式：

$$\mathrm{x}=x+y\cos\omega;\qquad \mathrm{y}=y\sin\omega.$$

(读者可以自行证明)这样，我们就得到了直角坐标系与斜坐标系在原点，横轴重合，单位长度相同的条件下，点的坐标的互换公式：

$$\begin{cases}\mathrm{x}=x+y\cos\omega\\ \mathrm{y}=y\sin\omega.\end{cases}\tag{1}$$

如果要将直角坐标化为斜坐标，(1) 式可以变形成，

$$\begin{cases}x=\mathrm{x}-\mathrm{y}\,\mathrm{ctg}\,\omega,\\ y=\mathrm{y}\csc\omega.\end{cases}\tag{2}$$

利用上面关系式，可以把点的坐标或曲线的方程，由斜坐标化成直角坐标，或由直角坐标化成斜坐标.

例 1 已知斜坐标系的坐标角 $\omega=60^0$，(1) 把点 A 的斜坐标 $(-2, 2)$ 化成直角坐标；(2) 把点 B 的直角坐标 $(2, -\sqrt{3})$ 化成斜坐标.

解：(1) $\because\ \omega=60°$，$\therefore\ \cos\omega=\frac{1}{2}$，$\sin\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\ \mathrm{x}=x+y\cos\omega=-2+2\times\frac{1}{2}=-1;$$

$$\mathrm{y}=y\sin\omega=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

即点 A 的直角坐标为 $(-1, \sqrt{3})$，

(2) $\because\ \omega=60°$，$\therefore\ \mathrm{ctg}\,60°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$$\csc 60°=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x = \mathrm{x} - \mathrm{y}\operatorname{ctg}\omega = 2+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3} = 3;$$

$$y = \mathrm{y}\csc\omega = -\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\sqrt{3} = -2.$$

即点 B 的斜坐标为 $(3, -2)$.

例 2 已知斜坐标系的坐标角为 ω，把下列曲线的直角坐标方程化成斜坐标方程：

(1) $A\mathrm{x}+B\mathrm{y}+C=0$；(2) $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=R^2$.

解：(1) $\because\quad \mathrm{x}=x+y\cos\omega,\ \mathrm{y}=y\sin\omega.$

$$\begin{aligned}A\mathrm{x}+B\mathrm{y}+C &= A(x+y\cos\omega)+By\sin\omega+C\\ &= Ax+(A\cos\omega+B\sin\omega)y+C.\end{aligned}$$

$\therefore$ 所求的斜坐标方程为：

$$Ax+(A\cos\omega+B\sin\omega)y+C=0.$$

(2) $\because$

$$\begin{aligned}\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 &= (x+y\cos\omega)^2+(y\sin\omega)^2\\ &= x^2+y^2(\cos^2\omega+\sin^2\omega)+2xy\cos\omega\\ &= x^2+y^2+2xy\cos\omega.\end{aligned}$$

$\therefore$ 所求的斜坐标方程为：

$$x^2+y^2+2xy\cos\omega=R^2.$$

3 向量与平面仿射坐标系

在复数里，我们已经讨论过向量的概念．所谓向量，就是既有大小又有方向的量．向量可以用有向线段表示，线段的长度表示向量的大小，叫做向量的模或叫向量的绝对值，线段

的方向表示向量的方向．有向线段的起点与终点，分别叫做向量的起点与终点．向量 $\boldsymbol{AB}$（或 $\boldsymbol{a}$）的模（长度）记作 $|\boldsymbol{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$）．模（长度）为零的向量叫做零向量．通常用 O 表）示．零向量的方向不确定．

下面为了讨论的需要，再引入一些概念．

模（或长度）为 1 的向量叫做**单位向量**．通常用 $\boldsymbol{e}$ 表示．

向量具有长度（大小）与方向两个要素，我们把长度相等，方向相同的两个向量，叫做**相等向量**，把长度相等、方向相反的两个向量叫做**互逆向量**或**互反向量**．例如在图 1.5 中，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{DC}$ 是相等向量，$\boldsymbol{AD}$ 与 $\boldsymbol{CB}$ 是互逆向量．

在图 1.5 中，由于 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{DC}$ 是相等的向量，所以向量可以根据需要进行平移．换句话说，向量的起点可以任意选择．这种起点可以任意选择的向量，叫做**自由向量**．本书中所涉及的向量，如果未作特别说明，一般都是指自由向量．

在自由向量的意义下，我们将平行于同一直线的向量，叫做**共线向量**．显然，零向量与任何向量共线．

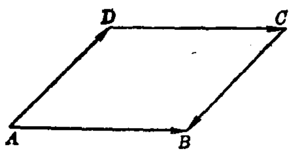


图 1·5

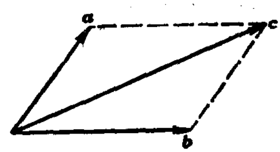


图 1·6

在学习复数与物理中的力学时，我们已经看到过向量加法和向量减法．向量加法可以采用平行四边形法则：如图 1.6中，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点在同一点 O 上，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 就是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中，从 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 交点 O 出发的那条对角线 $\boldsymbol{c}$、向量减