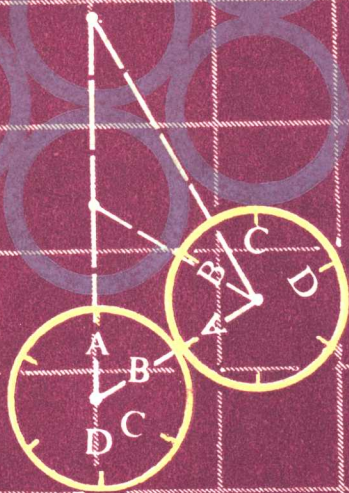


趣味几何学



3
2

别莱利曼著 符其珣译

中国青年出版社

趣味几何学

别莱利曼著 符其珣译

中国青年出版社

封面设计：韩 琳

趣味几何学

〔苏〕别莱利曼著

符其珣译

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092 1/32 10印张 180千字

1951年12月北京第1版 1980年4月北京第2版

1980年4月北京第9次印刷

印数 74,001—274,000册 定价 0.72元

原书第九版编者序言摘要

《趣味几何学》不但是为那些爱好数学的人而写，也是为那些还没有发现数学上许多引人入胜的东西的读者写的。

这本书尤其是写给那样的读者看的：他们只在学校里学过（或者现在正在学）几何学，因此还不习惯去注意在我们周围世界里各种事物的习见的几何关系，不会把学到的几何学知识应用到实际方面去，不知道在生活中间遇到困难的时候、在行军或露营的时候，应用学到的几何学知识。

引起读者对于几何学的兴趣，或照本书著者的说法，“引起研究它的愿望，培养研究它的嗜好，是本书的主要任务”。

为了这个目的，著者把几何学“从学校教室的围墙里引到户外去，到树林里，到原野上，到河边，到路上，以便在露天下不用教科书和函数表，无拘无束地来做几何作业……”，把读者的注意力吸引到列甫·托尔斯泰、契诃夫、儒勒·凡尔纳和马克·吐温的篇页上去，从果戈里和普希金的著作里找出几何问题的材料，并且，还向读者提出“形形色色的练习题目，内容是很有趣味的，结果是出人意外的”。

《趣味几何学》第七版起不是经过著者自己修订的。别莱利曼已在 1942 年列宁格勒被围的时候逝世了。

博·科尔捷姆斯基

目 次

上编 户外的几何学

第一章 树林里的几何学..... 2

阴影的长度(2) 还有两个方法(8) 儒勒·凡尔纳的测高法(10) 侦察兵的测高法(12) 利用记事本的测高法(13) 不接近大树测树高(15) 森林工作者的测高仪(16) 利用镜子测高(20) 两棵松树(22) 大树树干的形状(22) 万能公式(24) 长在地上的树的体积和重量(27) 树叶的几何学(30) 六脚力士(32)

第二章 河边几何学.....36

测量河宽(36) 利用帽檐测距(41) 小岛的长度(43) 对岸上的行人(45) 最简单的测远仪(47) 河流的能量(50) 水流的速度(51) 河水的流量(54) 水涡轮(58) 彩虹膜(59) 水面上的圆圈(60) 爆炸中的榴霰弹(63) 船头浪(64) 炮弹的速度(67) 水池的深度(69) 河里的星空(70) 在什么地方架桥?(72) 要架两座桥梁(73)

第三章 开阔原野上的几何学.....75

月亮的视大小(75) 视角(78) 盘子和月亮(79) 月亮和分币(80) 摄影的特技镜头(81) 活的测角仪(84) 雅科夫测角仪(88) 钉靶测角仪(90) 炮兵的测角仪(91) 视觉的灵敏度(93) 视力的极限(95) 地平线上的月亮和星星(98) 月亮影子的长度(101) 云层离地面多高?(102) 从照片上计算塔高(108) 给你去做练习(109)

第四章 路上的几何学..... 111

步测距离的本领(111) 目测法(112) 坡度(116) 一堆碎石(119)“骄傲

的土丘”(120) 公路转弯的地方(123) 弯路半径(124) 谈谈洋底(127)
世界上有“水山”吗?(129)

第五章 不用公式和函数表的行军三角学131

正弦的计算(131) 开平方根(136) 从正弦求角度(137) 太阳的高度
(139) 小岛的距离(139) 湖的宽度(141) 三角形地区(143) 不作任何
度量的测角法(144)

第六章 天地在哪儿碰头?.....147

地平线(147) 地平线上的轮船(150) 地平线的远近(152) 果戈里的塔
(155) 普希金的土丘(156) 铁轨在什么地方碰头?(157) 灯塔的题目
(158) 闪电(159) 帆船(160) 月球上的“地平线”(161) 在月球的环形
山上(161) 在木星上(162) 给你去做练习(162)

第七章 鲁滨孙的几何学(儒勒·凡尔纳小说中的一段)···164

星空几何学(164) 神秘岛的纬度(168) 地理经度的测量(170)

下编 在几何学的正经和玩笑之间

第八章 黑暗中的几何学174

在船舱底层(174) 水桶的测量(175) 测量尺(176) 还需要做些什么
(177) 验算(180) 马克·吐温的夜游(184) 瞎转圈子(186) 徒手度量
法(196) 黑暗中的直角(198)

第九章 关于圆的新旧材料200

埃及人和罗马人的实用几何学(200) 圆周率的精确度(201) 杰克·伦
敦的错误(203) 掷针实验(204) 圆周的展开(206) 方圆问题(208) 方
圆问题的近似解法(212) 头或脚(214) 赤道上的钢丝(215) 事实和
计算(216) 钢索女郎(219) 经过北极的路线(222) 传动皮带的长度
(228) 聪明的乌鸦(231)

第十章 不用测量和计算的几何学233

不用圆规的作图(233) 铁片的重心(234) 拿破仑的题目(235) 最简单的三分角器(237) 時計三分角器(239) 圆周的划分(240) 打弹子的题目(242) “聪明”的弹子(244) 一笔画(251) 可尼斯堡的七座桥梁(255) 正方形的检验(256) 下棋游戏(257)

第十一章 几何学中的大和小259

在一立方厘米里面有 27,000,000,000,000,000 个(259) 体积和压力(262) 比蛛丝更细,可是比钢还结实(264) 两个容器(266) 巨人卷烟(267) 鸵鸟蛋(268) 隆鸟蛋(269) 大小对比最鲜明的蛋(269) 不把蛋壳打破,测定蛋壳的重量(271) 鲜明对比的图画(271) 我们正常的体重(274) 巨人和侏儒(275) 格列佛的几何学(276) 云和灰尘为什么会浮在空气中(279)

第十二章 几何学上的经济学283

巴霍姆怎样买地?(托尔斯泰的题目)(283) 是梯形还是矩形?(288) 正方形的奇妙特性(290) 其他形状的地块(292) 最大面积的图形(293) 钉子(297) 最大体积的物体(298) 定和乘数的乘积(298) 最大面积的三角形(300) 最重的方木梁(301) 硬纸三角形(302) 白铁匠的难题(304) 车工的难题(306) 怎样把木板接长?(309) 最短的路程(311)

上 编

户外的几何学

大自然用数学的语言讲话，
这个语言的字母是：圆、三角
形以及其他各种数学形体。

——伽里略

第一章 树林里的几何学

阴影的长度

一直到今天,我还记得小时候一件使我惊愕的事情:我看到一位秃顶的看林人,站在一棵大松树附近,用一具袖珍型的小仪器在测量这棵大树的高度。他把一块四方形的木板对着树梢瞄了一下,这时我以为这个老头儿马上就要拿着皮尺爬上树去了,哪里知道他并没有这样做,他把那具小巧的测量仪器放回口袋里,向大家说测量已经完毕了。可是我以为测量还没有开始呢……

我那时还很年轻,这种既不要把大树砍倒、也不用爬到树顶去测量高度的方法,对于我简直象一件魔术那么神奇。一直到后来我学到了初等几何学以后,才知道表演这种魔术竟是这么简单。象这样只利用最简单的仪器、甚至根本不用什么东西进行测量,有各种各样的方法。

其中最容易而最古老的方法,无疑是公元前六世纪古希腊哲人泰勒斯用来测定埃及金字塔高度的那个方法。他利用了金字塔的阴影。法老和祭司聚集在一座最高的金字塔脚下,都很关心地望着这位想靠阴影确定这巨大建筑物高度的北方来客。据传说,泰勒斯选择了当他自己的影子长度恰好跟他身高相等的日子和钟点进行测量,因为这时候,金字塔的

高度也应当等于它投下的阴影长度^①。这或许是人从他自己的影子得到好处的唯一情况了。

这位古希腊哲人的问题，今天我们的孩子都会感到十分容易解答，但是我不应该忘记，我们现在是从泰勒斯以后许多人所建立起来的几何学大厦的高处看这问题的。公元前300年，希腊数学家欧几里得写了一部很好的书，在他死后的两千年来一直是用这本书学习几何学的。这本书里所讲的定理，虽然在今天每一个中学生都知道，在泰勒斯的时代却还没有发现。而要利用阴影来测量金字塔的高度，必须知道三角形的一些几何性质——就是下面两个特性（其中第一个还是泰勒斯自己发现的）：

1. 等腰三角形的两底角彼此相等；反过来说，三角形的两角相等，它们的对边必然相等。

2. 任意三角形（或者至少是直角三角形）的三个角的总和等于两个直角。

只有在知道了这两点之后，泰勒斯才能断定，当他的影子等于他的身高的时候，日光是以等于直角的一半的角度射向水平的地面，因此才可以断定，金字塔的顶点，塔底的中心点和塔影的端点三者，恰好形成一个等腰三角形。

在天气晴朗的时候，用这个方法测量孤立的大树的高度是很便利的，孤立的大树的阴影不会跟邻近的大树的阴影混在一起。但是在纬度比较高的地区，却不象在埃及那么容易

^① 当然，阴影的长度要从金字塔的方底的中心算起；至于塔底的长，泰勒斯是可以很方便地直接测量出来的。

选择到适宜的时间。这是因为在那些地方太阳升起得比较低，以致阴影只能在夏季中午前后的短暂时间里等于投出这个阴影的物体的高度。因此泰勒斯所采用的方法并不是到处适用的。

可是，我们不难把方才那个方法略为变更使它可以在有太阳的时候利用任何长度的阴影。我们只要除了把这个阴影的长度量下来之外，再把自己身体或者一根木杆的阴影的长度量出，就可以用比例算出所要测量的高度(图 1)。

$$AB : ab = BC : bc,$$

这是因为树影长度是你身体(或木杆)阴影长度的几倍，树高也恰好是你身(或木杆)高的几倍。这自然是从几何学中两个

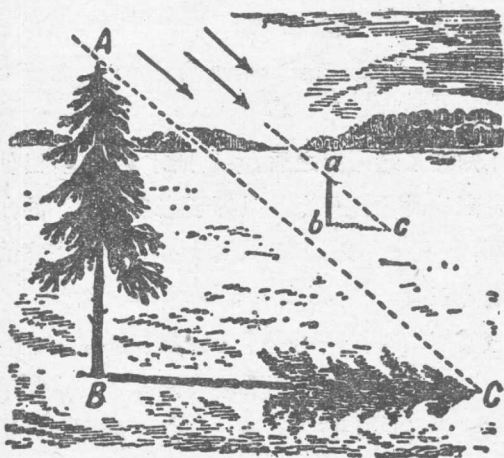


图 1. 利用阴影测量树的高度。

三角形 ABC 和 abc 相似(因为两角相等)的关系得出来的。

也许有些读者会提出异议,认为象这么简单的东西,根本用不到拿几何学来引证;难道没有几何学的话,我们就不知道树高多少倍,它的阴影也就长多少倍吗?可是,事情却不象你所想象的那么简单。你不妨把这个规则引用到由街头路灯光投下的阴影上,就知道这个规则不对了。你从图 2 可以看到,木柱 AB 的高度是木橛 ab 的三倍,但是木柱的阴影却相当于木橛阴影 ($BC:bc$) 的八倍。为什么在一种情形下这个方法可以行得通,在另一种情形下就行不通,要想解释清楚这个问题,没有几何学就不行。

〔题〕 让我们仔细研究一下,两种情形的区别究竟在哪里。原来太阳射来的光线都是彼此平行的,路灯射来的呢,却并不平行。说路灯射来的光线不平行是很明显的,但是,为什

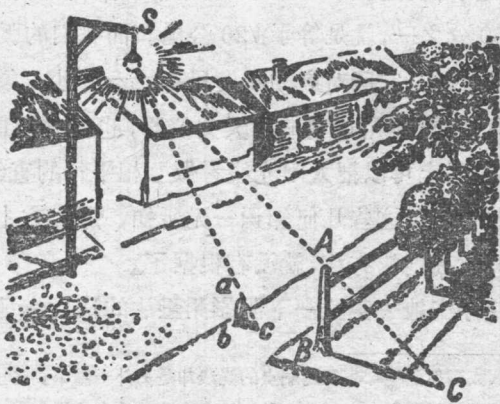


图 2. 在什么情形下这种测量方法不能适用?

么我们能够说太阳射来的光线是平行的呢？它们在射出来的那一点上不是一定相交的吗？

〔解〕 我们把射到地面上的太阳光线看作平行的，是因为各道光线之间的角度太小了，小得简直无法捉摸。我可以用一个最简单的几何学上的计算，给你证明这一点。我们不妨假定太阳上某一点发出了两道光线，它们落到地面的某两点，这两点间的距离是一公里。这就是说，假如我们把圆规的一只脚放在太阳发出光线的那一点上，拿另一只脚用太阳到地球的距离（就是 150,000,000 公里）做半径画一个圆的话，夹在两道光线（两条半径）之间的弧长是一公里，而这个巨大圆周的长应该等于 $2\pi \times 150,000,000$ 公里 = 940,000,000 公里。那么，在这个圆周上每一度的弧长是圆周长的 360 分之一，也就是大约等于 2,600,000 公里；每一分的弧长是每一度的 60 分之一，就是等于 43,000 公里，而每一秒的弧长又是每一分的 60 分之一，就是等于 720 公里。而我们的弧长一共只有 1 公里；可知，它所对应的角度只有 $\frac{1}{720}$ 秒。象这么微不足道的角度，就是用最精确的天文仪器，也很难测量得出，因此，我们实际上可以把太阳光线看做互相平行的直线^①。

假如我们对这些几何知识一无所知，那么方才所说的利用阴影测定高度的方法，就没有根据了。

假使你实地去实验一下阴影测量法的话，你马上就可以

① 从太阳射到地球直径两端点的光线却是另外一回事，这里射线间的角度大得足够用仪器测量出来（约 17 秒），这个角度的确定为天文学家提供了一个测定地球和太阳之间的距离的方法。

发现这个方法并不十分可靠。因为阴影的尽头并不是很分明的，以致无法把它的长度量得完全准确。太阳光投出来的每一个阴影，在尽头都有一带轮廓不清楚的、淡淡的半影，正由于这个半影，就使阴影的尽头无法确定。这是因为太阳并不是一个点，而是一个巨大的发光体，光线是从它表面上许多点射出来的。图3表示为什么树影 BC 会多出一段逐渐消失的半影 CD 的原因。半影两端 C 、 D 跟树梢 A 所形成的角 CAD 跟我们看太阳圆面所夹的视角相同，就是半度^①。由于阴影量得不完全准确而产生的测量误差，即使太阳位置并不过低的时候也可能达到 5% 或者更多。这个误差再加上其他不可避免的误差——例如由于地面不平所引起的误差等——会使测量的结果不很可靠。譬如在丘陵地带，这个方法就完

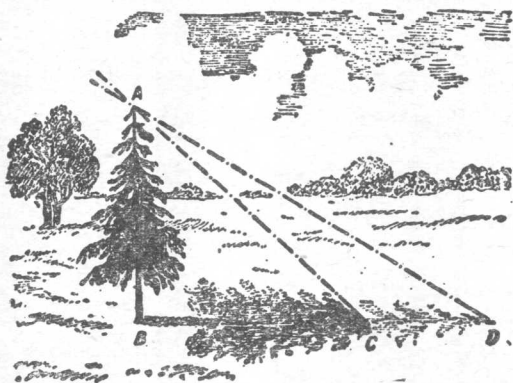


图3. 半影是怎样形成的？

① 关于“视角”参看第三章。

全不能采用。

还有两个方法

测量高度完全可以不利用阴影。这类测量方法很多，我们先讲两个最简单的。

首先，我们可以利用等腰直角三角形的性质，用到一具最简单的小仪器；这种仪器很容易制作，只要一块木板和三枚大头别针就行。在随便什么样的木板上甚至在有一面光滑面的树皮上，画出一个等腰直角三角形，然后把三枚大头别针钉牢在这三角形的三个顶点上（图4）。如果你在制造的时候，手头没有三角板，无法绘出正确的直角，也没有圆规，无法绘出等长的两边，那么你可以把一张纸片先对折一次，再横过来对折一次，就得到直角了；这张纸片同时还可以代替圆规，来量出相等的距离。

你看，这个仪器就是在露营的时候也完全能够制造出来。

使用这仪器的方法也不比制造它困难。首先，站在要测量的大树附近把这个仪器拿在手里，使三角形的一条直角边随时保持竖直状态，只要在这直角边上端的大头针上垂下一

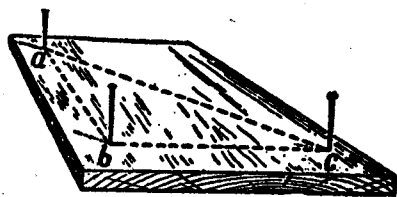


图4. 测高用的三针仪。

条细线，下系一块重物，使细线恰好跟这直角边相合就行了。然后，你向前走近这棵树或离开这棵树往后退，要找出一个地

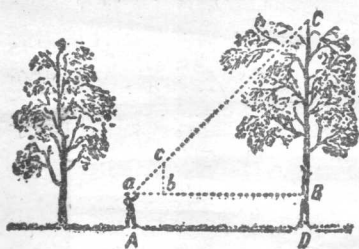


图 5. 使用三针仪的图解。

点 A (图 5), 使你在这个地方用眼睛通过大头针 a 和 c 望去的时候, 树梢 C 恰好能被这两枚大头针所遮掩, 这就是说, 直角三角形的弦 ac 的延长线恰好通过点 C 。这时候, 距离 aB 显然跟 CB 相等, 因为角 $a = 45^\circ$ 。

因此, 只要量出 aB (如果地面平坦, 量出跟它相等的距离 AD) 并把 BD 加上去 (BD 是你的眼睛离地面的高度), 就可以得出树的高度了。

另外还有一个方法, 可以连三针仪都不要。

这只要一根长杆, 把它竖直插在地面上, 使露在地面以上的部分恰好跟你的身高相等^①。插

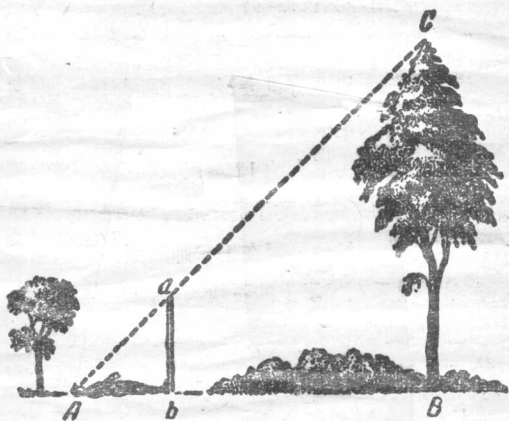


图 6. 还有一个测量树高的方法。

① 严格说来, 长杆露在地面以上的部分应该等于你站立的时候眼睛离地面的高度。

这根杆子的地方需要经过一番选择，必须使你象图 6 那样仰面躺下以后脚跟紧抵杆脚的时候，眼睛看到树梢跟杆顶恰好在同一条直线上。因为三角形 Aba 是等腰三角形，又是直角三角形，角 $A=45^\circ$ ，所以 $AB=BC$ ，也就是说，树的高度等于你的眼睛到树根的距离。

儒勒·凡尔纳的测高法

下面的测量物体高度的方法也并不复杂，这个方法在儒勒·凡尔纳的著名小说《神秘岛》里有过生动的描述。

“我们今天要去量眺望岗的高度，”工程师说。

“您要使用什么仪器吗？”赫伯特问。

“不，用不着，我们要换一种方法，跟昨天一样简单而准确。”

这位年轻人只要有机会，什么东西都想学，所以他跟着工程师走下花岗石壁向海滨走去。

工程师拿了一根大约 12 英尺长的直的木杆，把它跟自己的身高来比，他对自己的身高的尺寸是知道得很清楚的，这样就把木杆的长度量得尽可能准确。赫伯特跟在工程师后面，手里拿着工程师交给他的悬锤，这是一块系在绳子上的石块。

走到离陡峭的花岗石壁大约 500 英尺的地方，工程师把木杆插进沙土里，大约插下 2 英尺深，并且用悬锤把它校正到竖直的位置，然后把它插牢。

插好木杆，他就走开一段距离，找到一个地方，在沙上仰面躺了下来，在这里他的眼睛恰好看到木杆尖端跟峭壁的顶端在一条直线上（图 7）。他在这点上小心地插了一个木橛做标记。