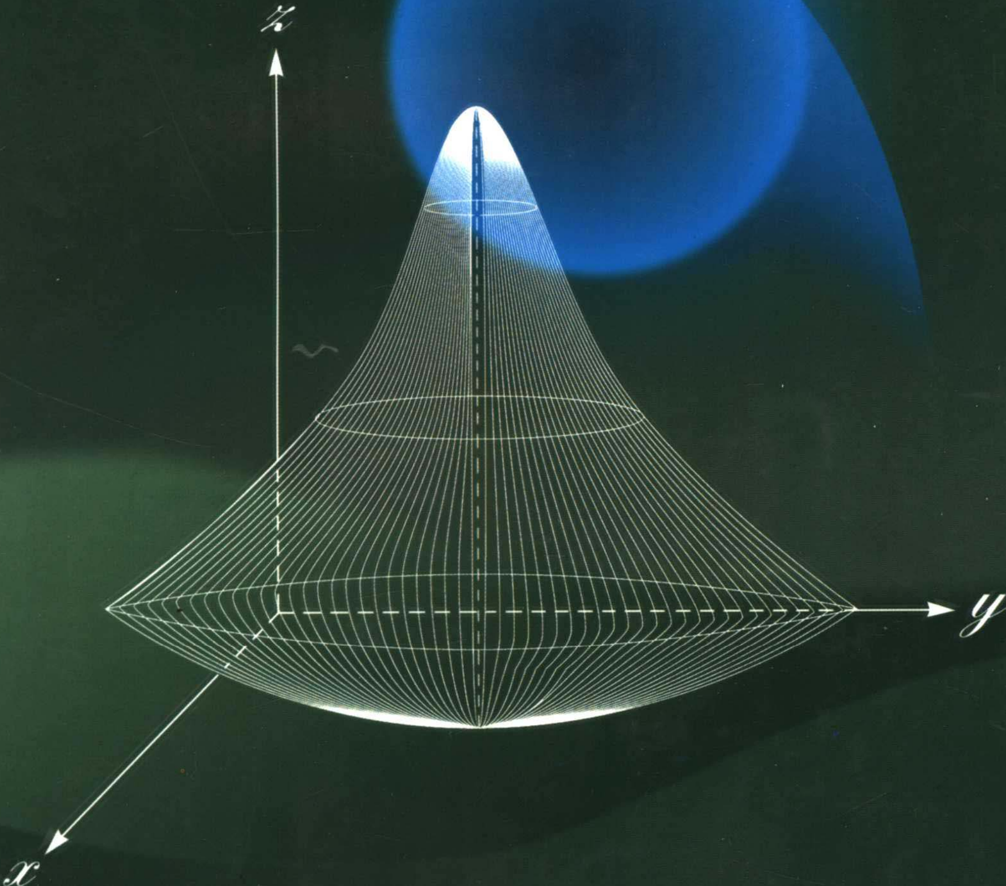
Gailulun Yu Shuli Tongji

概率论与数理统计

主　编　杜晓林　王玉民
副主编　白如凤
主　审　赵广生



气象出版社
China Meteorological Press

概率论与数理统计

主　编　杜晓林　王玉民
副主编　白如凤
主　审　赵广生

气象出版社

内 容 简 介

本书内容包括随机事件与概率、条件概率和事件的独立性、一维随机变量、多维随机变量、随机变量的数字特征、样本及其分布、参数估计、统计假设检验、方差分析、回归分析等内容，各章节配有习题并附有习题答案。

本书可作为高等农业院校概率论与数理统计课程的教材，也可作为工科、师范类院校教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杜晓林，王玉民主编．—北京：
气象出版社，2005.1

ISBN 7-5029-3921-0

Ⅰ．概…　Ⅱ．①杜…②王…　Ⅲ．①概率论②数理统计　Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第008325号

气象出版社出版

(北京海淀区中关村南大街46号　邮编：100081)

总编室：010-68407112　发行部：010-62175925

网址：http://cmp.cma.gov.cn　E-mail：qxcbs@263.net

责任编辑：方益民　林雨晨　终审：周诗健

封面设计：刘　扬　责任技编：陈　红　责任校对：赵玲玲

*　*　*

北京燕龙印刷有限公司印刷

气象出版社发行

开本：787×960　1/16　印张：17.5　字数：360千字

2005年2月第1版　2005年2月第1次印刷

印数：1～4500　定价：36.00元

序

概率论是整个随机理论的理论基础，它不仅研究随机现象的基本规律，还通过引入随机变量来刻画和描述随机现象，并在此基础上研究随机变量的规律性. 数理统计则是通过观测和实验数据，根据建立在概率论基础上的统计原理，对数据进行分析、整理，进而对所研究的随机现象进行推断和预测.

随着科学技术的发展和社会的进步，随机理论已逐步渗透到自然科学和社会科学的各个领域，在工农业生产、科学研究、经营管理、质量控制、环境监测和抗灾救险等方面都发挥着越来越重要的作用.

编　者

2004 年 7 月

前　　言

人类在观察自然和生产经营活动中，经常会遇到一些随机现象。例如，中央电视台心连心艺术团某日要到某地进行慰问演出，届时当地的天气是晴天、多云或是阴天、有雨；某商场最近购进了100件新式服装，一个月内能售出多少件；某生产企业参加一次出口商品交易会，展会期间所能得到的定货金额是多少；我国人均国民生产值达到世界中等发达国家平均水平需要多少年等等。概率论与数理统计（统称为随机理论）就是人类在研究这类随机现象的过程中创立起来的数学学科.

传统数学（如微积分）只研究变量之间的对应关系（函数），随机理论的研究对象是随机变量，主要研究随机变量的取值规律.在多个（有限或无穷多个）随机变量的情况下，还要研究这些随机变量之间的相互依赖关系。随机变量是随机理论中最为重要的概念之一，随机理论也是由随机变量的理论构成的.

概率论与数理统计是从数量上研究随机现象规律性（即统计规律）的数学分支学科.概率论侧重于对随机现象及其规律给出定义和进行基本理论研究，数理统计侧重于从实验数据出发认识随机现象的规律.随着科学技术的发展，概率论、特别是数理统计已广泛应用于物理、化学、生物、工业、农业、医学及社会科学等众多领域，概率论的思想和数理统计方法越来越广泛地被人们所采用.

多年来，国内外出版了大量的概率论与数理统计的教材和专著，它们各具特色，也有所创新.但农科院校本科生教学计划中数学学时、特别是用于概率论与数理统计教学的学时较少，学生微积分基础相对较弱，更需要编写一本适合农科院校教学计划和学生程度的“传统”的概率论与数理统计教材，以适应高校“扩招”后教学的需要.

概率论与数理统计是一门概念较为抽象、公式较为繁杂、学起来较为困难的数学课程.学生在学习该课程时，要求正确理解基本概念和原理，能熟练运用基本方法.编者

总结了多年来概率论与数理统计的教学经验，力图在本书中把概念讲得清晰，循序渐进，删去较长的理论证明，尽量多作直观解释，增加典型例题和大量习题，努力做到有助于学生理解基本概念和基本原理.在编写的过程中，参考了国内一些有关教材，大多数习题取自相应教材.

本书中图、表及公式采用的编号是以章作区分的，如图2.1表示第二章的第1图；表3.1表示第三章的第1表；(1.5)表示第一章的第5个公式，习题4.2表示第四章第二节的习题，习题解答亦然.

本书主要由北京农学院教师编写，参加编写人员：杜晓林副教授编写了第三、四、五、八、九章，王玉民副教授编写了第一、二、六、七、十章，白荣凤老师编制了部分章节的习题，并参加了部分章节的编写，杜晓林完成了全书的统稿工作.北京农学院基础科学系数学教研室主任赵广生副教授担任主审，对原稿进行了认真地审阅，提出了较好的修改意见.

2004年6月，我们又对该教材进行了第3次修订，改正了第一、二版(校内印刷、使用)中的印刷错误，使教材更加系统.

本讲义讲授约需70学时，讲授过程中可根据需要对带*的章节进行适当删减.

由于时间仓促，编者水平有限，讲义中难免有不妥甚至错误之处，殷切地盼望同行和读者批评指正.

编　者

2004年7月

目　　录

第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　必然现象与随机现象

在一定条件下,必然出现某种结果或必然不出现某种结果的现象称为必然现象.例如,在常温常压条件下,将水加热到100℃,水必然会沸腾;将水冷却到0℃,水就会结冰.又如,向上抛掷一块石头,石头必然下落;但无论将石头置于何种环境下,石头也不能孵出小鸡.这些都是必然现象,即事先就能预知结果的现象.而随机现象则完全不同,它是在同样条件下,多次进行同一实验,所得结果却不尽相同,并且事先无法预测将会出现什么结果的现象.

例1:抛掷一枚均匀硬币,落地后可能正面向上,也可能反面向上.

例2:某射手向同一目标连续射击5次,目标被击中的次数可能是0,1,2,3,4,5中的任何一个数.

例3:甲、乙二人进行定点投篮比赛,比分也会出现多种结果.

例4:某应急救助中心在一个工作日内收到的求助信号次数,可能是任何一个自然数.

例5:从某厂生产的一批灯泡中任取一只测量其寿命,结果可能是任何一个非负实数.

以上各例描述的都是随机现象,也是自然界中普遍存在的一种现象.它们的共同特点是实验结果的不确定性.人们经过长期观察和深入研究发现,在随机现象表现的这种不确定性背后,却隐藏着内在的规律性.虽然在一次实验之前,人们无法准确预测究竟会出现哪种结果,但在相同条件下进行重复实验时,其结果却呈现出明显的统计规律性.概率论与数理统计正是揭示随机现象内在规律的有力工具.

1.1.2　随机实验与随机事件

随机现象可以通过随机实验进行研究.所谓随机实验,是指在相同条件下可以重复进行,每次实验的结果不止一个,并且所有可能出现的结果都是已知的,但一次实验之前又不知道究竟会出现哪一个结果.这里所说的随机实验不仅包括经过精心设计,有计划地进行的实验,还包括对某些并非出自人为设计,而是客观存在于大自然和人类社会

活动中的随机现象的观测. 以后我们所说的实验,均指随机实验.

对于某个随机实验,在一次实验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件,简称事件,通常用大写字母$A,B,C,\cdots$或$A_1,A_2,\cdots$表示. 例如,在例1 中,"正面向上"和"反面向上";在例2 中,"击中目标3 次以上";在例3 中,"比分为1 比3";在例4 中,"接到3 个求助信号";在例 5 中,"灯泡寿命在1 200～1 500 小时之间"等都是相应实验的随机事件.

在随机实验中,不能再分的随机事件称为该实验的基本事件,它也是最简单的随机事件. 例如,在例1 中的"正面向上"和"反面向上";在例3 中的"比分为1 比3";在例4 中的"接到3 个求助信号"等都是基本事件,而在例2 中的"击中目标3 次以上"和例5 中的"灯泡寿命在1 200～1 500 小时之间"均不是基本事件. 因为"击中目标3 次以上"可分解为"击中4 次"和"击中5 次";而"灯泡寿命在1 200～1 500 小时之间"可以是区间(1 200, 1 500)内的任一实数.

需要说明的是,有时一个事件是否为基本事件并不是绝对的,而是由实验的目的所决定. 例如,在例5 中,若要考察灯泡寿命的大小,那么基本事件就是"灯泡寿命为$t(t\geqslant 0)$",这项实验有不可数无穷多个基本事件;但若按灯泡寿命的大小将其分为"优质品"、"合格品"和"次品",则该实验就只有三个基本事件,即取出的灯泡为"优质品"、"合格品"和"次品".

每次实验中,在一定条件下必然发生的事件称为必然事件,不可能发生的事件称为不可能事件. 必然事件用Ω表示,不可能事件用$\varnothing$表示. 例如,在例2 中,"目标最多被击中5 次"就是必然事件,但"目标被击中6 次"就是不可能事件. 虽然必然事件和不可能事件都不具有不确定性,但为方便起见,我们仍将其作为特殊的随机事件来处理.

1.1.3 样本空间

在随机实验中,由于所讨论的事件不止一个,而是有许多甚至无穷多个,这些事件之间又存在着一定的关系. 为研究方便,我们引进类似于集合论的概念和术语,以便能更好、更方便地描述随机事件.

在一个随机实验E中,一个基本事件称为E的一个样本点,记为ω;E的所有样本点(即基本事件)构成的集合称为E的样本空间(相当于全集),记为Ω,即$\Omega=\{\omega_i|i=1,2,\cdots\}$. 由于随机实验$E$的每一个事件都是由$E$的基本事件组合而成,所以它们都可用$E$的样本点的集合来表示 特别地,作为$E$的所有样本点的集合,样本空间$\Omega$包含了所有的基本事件,因而是必然事件;相反,不可能事件则未包含任何一个样本点,可用空集$\varnothing$表示.

对于一个具体的随机实验来说,它的样本空间是由实验的内容和目的确定的. 如果将实验的结果用适当的记号或数字来表示,则样本空间就是这些记号或数字的集合.

在例 1 的实验 E_1 中，若用 H 表示“正面向上”，用 T 表示“反面向上”，则 $\Omega_1=\{H,T\}$.

在例 2 的实验 E_2 中，若用 k 表示“击中目标 k 次”，则 $\Omega=\{0,1,2,3,4,5\}$.

在例 3 的实验 E_3 中，若用二元数组 (m,n) 表示甲、乙二人投篮的比分，则 $\Omega_3=\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

在例 4 的实验 E_4 中，若用 k 表示“收到 k 次求助信号”$(k=0,1,2\cdots)$，则 $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$.

在例 5 的实验 E_5 中，若用 t 表示“任取一只灯泡，测得寿命为 t”，则 $\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

同样，样本空间的样本点也取决于实验目的. 例如，在例5 的实验 E_5 中，若只需区分灯泡的等级，则 $\Omega_5=\{$优质品，合格品，次品$\}$.

随机实验 E 的任何一个随机事件 A，或者是一个基本事件，或者由若干个基本事件组合而成. 在引入样本空间 Ω 之后，事件 A 就可看作样本空间 Ω 的子集. 事件 A 发生，当且仅当 A 所包含的基本事件有一个发生，即子集 A 中的一个样本点出现. 例如，在例 4 中，若事件 A 表示“收到的求助信号不超过 5 个”，则 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

习题 1.1

1. 一袋中有编号依次为 1，2，3，4，5 的五只球，现不放回地抽取 2 只，试确定这项实验的样本空间 Ω 及随机事件 A“抽到球的最小号码是 3”所含的样本点.

2. 甲、乙两名围棋选手进行五番棋比赛（无平局且下满五局），每局获胜者得一分，输者不得分. 试确定甲、乙两选手所得比分的样本空间 Ω 及随机事件 A“甲选手获胜”所含的样本点.

3. 抛掷两枚均匀骰子，观察所得点数，试确定这项试验的样本空间 Ω 及随机事件 A“所得点数之和为质数”包含的样本点.

4. 10 件产品中有 3 件次品，每次从其中任取一件（不放回），直到将 3 件次品全部取出，试确定抽样次数的样本空间 Ω 及随机事件 A“最多抽取 7 次”包含的样本点.

5. 将一根 1m 长的木棒随意截为三段，观察各段长度，试确定这项试验的样本空间 Ω 及随机事件 A“所得三段木棒能构成三角形”包含的样本点.

§1.2　事件的关系与运算

事件的关系与运算类似于集合的关系与运算，如果大家在学习这部分内容的时候，

能够采用类比的方法，把大家所熟悉的集合论的知识和方法应用到学习中去，将会带来事半功倍的效果.

1.2.1 子事件

若事件A发生必将导致事件B发生，则称事件A为事件B的子事件，记为$A\subset B$(图1.1). 为方便起见，我们规定，对任一事件，均有$\varnothing\subset A\subset \Omega$.

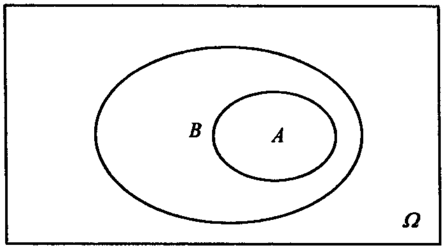


图1.1

若A是B的子事件，而B又是A的子事件，则称事件A与B相等，记作$A=B$. 即若$A\subset B$且$B\subset A$，则$A=B$.

1.2.2 和(并)事件与积事件

事件A与事件B至少发生一个的事件称为事件A与事件B的和事件(或并事件)，记为$A\cup B$(图1.2). 类似地，事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生的事件称为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件，记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

事件A与事件B同时发生的事件称为事件A与事件B的积事件，记为$A\cap B$或AB(图1.3).

类似地可定义事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件：$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n$；以及事件$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$的积事件：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=A_1A_2\cdots A_n\cdots.$$

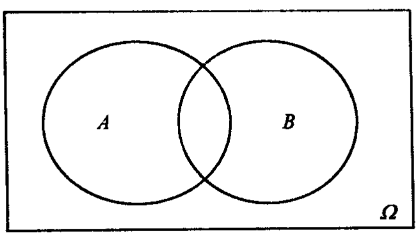


图1.2

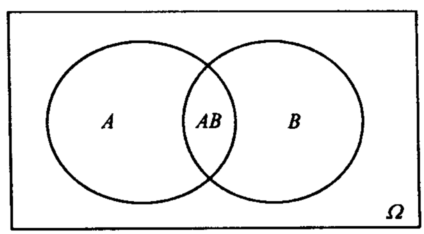


图1.3

1.2.3　差事件

事件A发生而事件B不发生的事件称为事件A与事件B的差事件，记为$A-B$(图1.4). 不难看出$A-B=A-AB$.

1.2.4　互斥事件与对立事件

若事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\varnothing$，则称事件A与事件B为互斥事件，也称事件A与事件B互不相容(图1.5). 当事件A与B互斥时，常把事件A与B的和事件记为$A+B$.

一般地，若一组事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中任意两个都互斥，称这组事件两两互斥. 同样，对于两两互斥的事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，也可将它们的和事件记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$.

若事件A与事件B互斥且其和事件为必然事件，即$AB=\varnothing$，且$A+B=\Omega$，则称事件A与事件B为对立事件或互逆事件，记为$B=\overline{A}$或$A=\overline{B}$(图1.6).

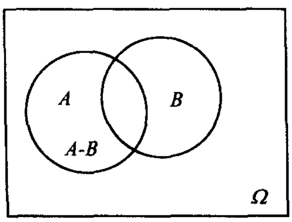


图1.4

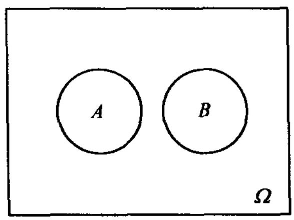


图1.5

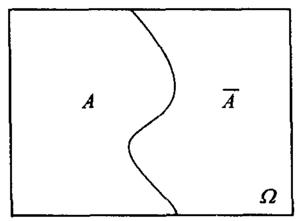


图1.6

1.2.5　互斥事件完备组

设Ω为某随机实验E的样本空间，如果一组事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足下列条件：

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互斥，即$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$；

(2)$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$.

则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$为样本空间Ω的一个互斥事件完备组，或称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为样本空间Ω的一个划分.

例如，在§1.1的例1中，H,T就是样本空间Ω_1的一个互斥事件完备组.

需要说明的是，同一个样本空间可以有多个不同的互斥事件完备组. 例如，在§1.1的例4中，若以A表示“收到求助信号不超过5个”，用B表示“收到求助信号6到10个”，用C表示“收到求助信号10个以上”，则A,B,C就是Ω_4的一个互斥事件完备组. 但是，若用S表示“收到求助信号不超过3个”，则$\overline{S}$就表示“收到求助信号3个以上”，于是，S和$\overline{S}$也是Ω_4的一个互斥事件完备组.