第二种方程的小参数解法

吉林師范大学数学系計算数学教研室

1961·12

第二种方程的小参数解法

吉林师大数学系計算数学教研室
于 璪

小参数法是求微分方程近似解的有效方法。本文將这种方法用于巴拿哈空間中的第二种非綫性泛函方程上去。並討論了它在积分方程微分方程中的应用。

§1 小参数法的基本原理

定理 設K是將巴拿哈空間X映射成自身的算子，且其可表成下列形式。

$$K = I - \lambda H$$

其中I为不变算子，λ为小参数，H也是將X映射成自身的算子。如果

$$|\lambda| \|H\| = \gamma < 1 \tag{1}$$

則对於每一个y方程

$$(I - \lambda H)x = y \tag{2}$$

在X中必存在唯一解x^*。且它可以表成λ的冪級数形式。即

$$x^* = y + \lambda Hy + \lambda^2 H^2 y + \cdots\cdots \tag{3}$$

如果以此級数的n項部分和S_n作方程(2)的n次近似解，則其誤差估值是：

$$\|x^* - s_n\| \leqslant \frac{|\lambda|^n \|H\|^n}{1 - |\lambda| \|H\|} \|y\| \tag{4}$$

証明，首先对于每个y級数

$$Sy = y + \lambda Hy + \lambda^2 H^2 y + \cdots\cdots \tag{5}$$

收斂的。事实上由不等式

$$\|\lambda^n H^n y\| \leqslant |\lambda|^n \|H\|^n \|y\| = r^n \|y\|$$

及(1)式显然可得

其次K的逆算子K^{-1}存在，且$K^{-1} = S$。

这是由于

$$(I-\lambda H)(I+\lambda H+\lambda^2H^2+\cdots+\lambda^nH^n)=I+(-1)^n\lambda^{n+1}H^{n+1}$$

$$(I+\lambda H+\lambda^2H^2+\cdots+\lambda^nH^n)(I-\lambda H)=I+(-1)^n\lambda^{n+1}H^{n+1}$$

由条件(1)得　当 $n\to\infty$ 时，$\lambda^{n+1}H^{n+1}\to 0$

从而 $(I-\lambda H)$ 的逆算子

$$K^{-1}=(I+\lambda H+\lambda^2H^2+\cdots)=S。$$

再將算子 S 作用于方程(2)的兩端得

$$x=sy。$$

此即方程(2)的解。

如果方程(2)还存在另一解 x'，即

$$(I-\lambda H)x'=y$$

再將 s 作用于此式的兩端得

$$x'=sy。$$

从而解的唯一性得証。

由級数(5)知此解可表成 λ 的冪級数形式，且以其 n 项部分和 s_n 作为 n 次近似解。

当 $n\to\infty$ 时此近似解收斂于方程(2)的准确解。

最后由級数(3)容易推得其誤差估計式：

$$\|x^*-s_n\|=\|sy-y-\lambda Hy-\lambda^2H^2y-\cdots-\lambda^{n-1}H^{n-1}y\|$$
$$=\|\lambda^nH^ny+\lambda^{n+1}H^{n+1}y+\cdots\|$$
$$\le|\lambda|^n\|H\|^n\|y\|(1+|\lambda|\|H\|+|\lambda|^2\|H\|^2+\cdots)$$
$$\le\frac{|\lambda|^n\|H\|^n}{1-|\lambda|\|H\|}\|y\|。$$

（証完）

注　显然此定理对於更一般的泛函方程

$$Kx=y \tag{6}$$

其中 K 可写成下列形式

$$K=H_0-\lambda H_1$$

此处 K，H_0，H_1 都是把空間 X 映射成自身的算子。且設逆算子 H_0^{-1} 存在。

以 H_0^{-1} 作用于(6)式的兩端得

$$H_0^{-1}Kx=(I-\lambda H_0^{-1}H_1)x=H_0^{-1}y \tag{7}$$

此即第二种方程。

如果 $|\lambda|\,\|H_0^{-1}\|\,\|H_1\|<1$ 則定理中的条件满足，从而定理中的所有結論成立。

§2 小参数法的应用

1）方法用于解綫性积分方程

考察弗列德霍姆第二种非齐次綫性积分方程，

$$Kx=x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt=f(s) \tag{8}$$

設函数 $x(s)$，$f(s)$ 在 $a\leqslant s\leqslant b$ 中連續。$K(s,t)$ 是 $a\leqslant s$，$t\leqslant b$ 中連續，从而 $|K(s,t)|\leqslant M$。

如果

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{9}$$

則方程(8)存在唯一的連續解 x^*。且它可表成 λ 的冪級数形式

$$x^*=x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\cdots\cdots$$

其中 $x_0=f$

$$x_n=\int_a^b K(s,t)x_{n-1}(t)\,dt$$

$$n=1,2,\cdots\cdots$$

此外还有如定理中的誤差估計式。

事实上令

$$Hx=\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt$$

那末方程(8)变成

$$(I-\lambda H)x=f$$

但由 $\|Hx\|\leqslant\|x\|\int_a^b K(s,t)\,dt=M(b-a)\|x\|$

知 $\|H\|\leqslant M(b-a)$

再由(9)式知

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}<\frac{1}{\|H\|}$$

从而定理中的条件(1)满足。

2）方法用于解非线性积分方程

考察非线性积分方程

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t,x(t))\,dt=f(s) \tag{10}$$

其中$x, f\in C[a,b]$。

設函数$K(s,t,\mu)$关于所有变元是連續的，且对於任意$x\in C[a,b]$ $K(s,t,x)$关于x是有界的，即

$$\|K(s,t,x)\|\leq M\|x\| \tag{11}$$

如果
$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{12}$$

則方程(9)存在唯一的連續解x^*，且它可表成λ的幂級数形式：

$$x^*=x_0+\lambda x_1+\lambda^2x_2+\cdots$$

其中　$x_0=f$

$$x_n=\int_a^b K(s,t,x_{n-1}(t))\,dt$$

$$n=1, 2, \cdots$$

此外有如定理中的誤差估值。

事实上　令

$$Hx=\int_a^b K(s,t,x(t))\,dt$$

則方程(10)变成

$$(I-\lambda H)x=f。$$

由(11)得

$$\|Hx\|\leq\int_a^b\|K(s,t,x(t))\|\,dt\leq M(b-a)\|x\|$$

从而

$$\|H\|\leq M(b-a)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

再由(12)得

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}<\frac{1}{\|H\|}$$

从而定理中的条件满足。

3）方法用于解偏微分方程的边值問题

为了敍述方便我們仅就下列波阿松方程第一边值問題討論，其实更一般的偏微分方程的边值問題也有效。

考察方程的边值問題

$$u-\lambda\Delta u=f \qquad u\in G \tag{13}$$

$$u|_{\Gamma}=0 \tag{14}$$

其中G是平面上的有界区域，Γ为区域G的边界，

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是拉普拉斯算子。

設算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 在所考慮的滿足条件(14)的函数集合X中有界的。即

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|<M_1\|u\|, \qquad \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|<M_2\|u\|。$$

令

$$M=\max\{M_1, M_2\}$$

如果 $$|\lambda|<\frac{1}{2M} \tag{15}$$

則方程(13)在X中存在唯一解 u^*，且它可表成λ的冪級数形式。

$$u^*=u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\cdots\cdots$$

其中 $u_0=f$

$$u_n=\Delta u_{n-1}$$

$$n=1, 2, \cdots\cdots$$

定理中的誤差估値式也成立。

事实上 对於任意 $u\in X$

$$\|\Delta u\|=\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|<\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|<2M\|u\|$$

从而

$$\|\Delta\| < 2M。$$

再考虑(10)得

$$|\lambda| < \frac{1}{2M} < \frac{1}{\|\Delta\|}.$$

从而定理中的条件满足。

参考文献

〔1〕 Л·В·康脱罗维奇，泛函分析与应用数学 数学进展 1卷4期(1955) 638～747

〔2〕 关肇直 泛函分析讲义 二章§10 (1958)

〔3〕 关肇直、林群、非线性函数方程的近似解法(1960)

〔4〕 加脑敏夫等 微分方程近似解法Ⅱ(1958)