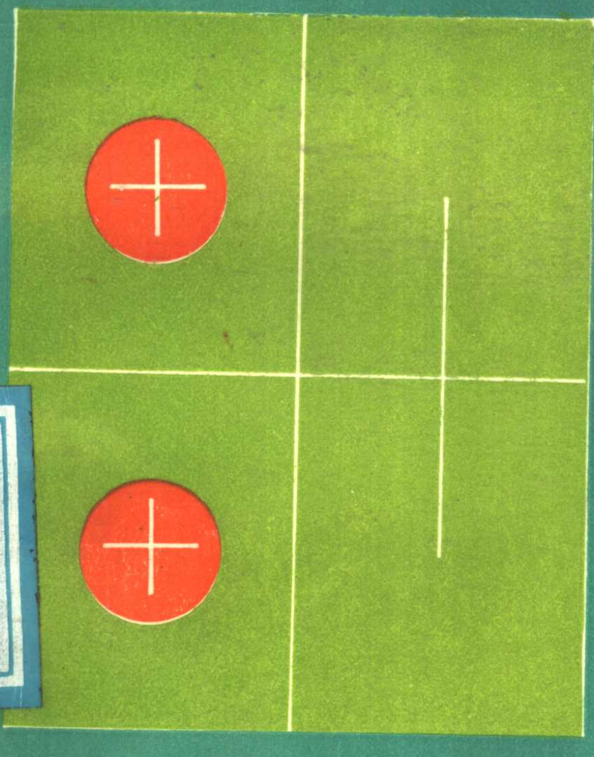
中学数学奥林匹克系列专题

图论基本知识 100例

张宁生 田利英 编著

新华出版社



中学数学奥林匹克系列专题

图论基本知识100例

张宁生　田利英　编著

新 华 出 版 社

中学数学奥林匹克系列专题
图论基本知识100例
张宁生 田利英 编著

新华出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
北京燕山印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 2.75印张 51,000字
1990年12月第一版 1990年12月北京第一次印刷
印数：1—15,000册
ISBN 7-5011-0936-2/G·290 定价：1.80元

引　言

物质结构，如晶体可看作是一个图。

电气网络可看作一个图。

此外，城市规划，交通图，工作调配图，均可视为图。

图是由点和线连接起来的。

图论是研究图的概念、性质及其应用的一门数学分支。图论有着广泛应用，如电子科学技术领域里的网络分析和综合；通讯网络与开关网络的设计；印刷电路的走线与集成电路的布局；计算机结构设计、编译技术及计算机应用等。

近年来国内外数学竞赛出现了许多与图论有关的试题，下面对图论，略作入门介绍。

编写本书之前，作者曾在北京实验中学高一联合小组开过选修课，依照校长王本中的意见是愈通俗愈好，这也是编写本书的基本格调——旨在入门(本书是该选修课的部分内容)。之后作者又在北京市奥林匹克数学学校高一组、北京市东城区奥林匹克数学学校等处讲过，本书就是在此基础上整理、修改而成，感谢上述学校师生们的支持。

目　　录

引言

§1　基本概念……………………………………………（1）
§2　基本性质……………………………………………（7）
§3　图的连通性…………………………………………（18）
§4　子图…………………………………………………（25）
§5　树……………………………………………………（32）
§6　E图与H图………………………………………（39）
§7　最小树问题…………………………………………（50）
§8　中国邮递员问题……………………………………（59）
§9　练习题解答…………………………………………（67）

§1 基本概念

1 定义

由V、E组成的二元组称作图，并用符号$G(V, E)$表示图，此处

(1) V是一个p元集合$\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，$p>0$

(2) E是一个q元集合$\{e_1, e_2\cdots, e_q\}$，$e_{ij}=\{v_i, v_j\}$表示由顶点v_i，v_j连接而成。其中 v_i $(i=1, 2, \cdots, p)$ 称作G中的顶点，e_j $(j=1, 2, \cdots, q)$ 称作G中的边。

例1 若在图$G(V, E)$中

(1) $V=\{A, B, C, D\}$

(2) $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$=\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{A, C\}, \{B, D\}\}$

试画其图。

解：如图1

说明：可以作一种直观解释，比如有A、B、C、D四名乒乓球选手。

A与B、C赛过

B与A、C、D赛过

C与A、B、D赛过

D与B、C赛过

对已经进行过的比赛，画出的图1即为其赛程图。

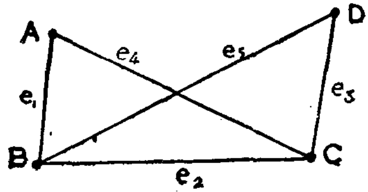


图1

还有一点值得注意，图中两边的交点不见得是图的顶点。如e_4、e_5“相交处”不是顶点也可画为图2。

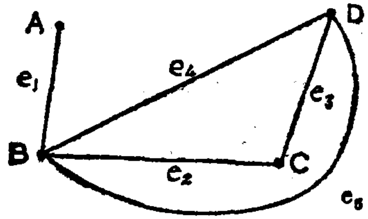


图2

练习1 设$V=\{a, b, c, d\}$，$E=\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{c, c\}, \{c, d\}\}$，试画出图$G(V, E)$

例2 在图1中，哪些点是相邻的。

答 (1) 因为A、B之间有关联边e_1，所以A、B相邻

(2) $\because e_4=\{A, C\}$, $\therefore A$、C相邻

(3) $\because e_2=\{B, C\}$, $\therefore B$、C相邻

(4) $\because e_5=\{B, D\}$, $\therefore B$、D相邻

(5) $\because e_3=\{C, D\}$, $\therefore C$、D相邻

2　多重图与简单图

(1) 若两个点之间多于一条边，则称为多重边

(2) 含多重边的图为多重图。

(3) 若边的两个端点相同，则称此边为环

(4) 无环、无多重边的图称为简单图

(5) 一个具有p个顶点的简单图，每两点之 间均有关联边，则称此图为完全图，记作K_p

以后提到图，如无特殊声明，均指简单图

例3　在图3中，e_1与e_2都是连接A、B两点的边，故为多重边

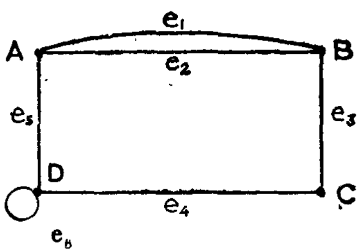


图3

e_6是一个环

例4　完全图K_6有15条边

一般地有

完全图K_p有$\frac{1}{2}p(p-1)$条边

例5　七桥问题

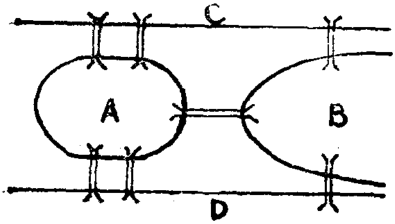


图4

哥尼斯堡（今加里宁格勒）有一条河，河中有一个岛，共建七座桥，连接起被隔开的四块陆地。如图4。有人希望作一次散步，从某块陆地出发，经过每座桥一次且仅一次，然后再回到原出发点是否可能？试将此问题转化为图论问题。

分析：图论中的图是由点集V与边集E组成的：今四块陆地相当于四个点，而联系各陆地之间的桥相当于边。因此是不难转化为图论问题的。

解：设四块陆地分别用点A、B、C、D表示，由于岛A与陆地C有两座桥可以画出关联A、C的两条边

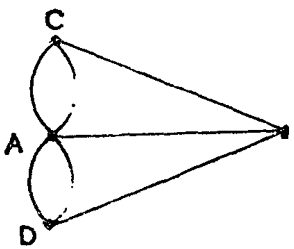


图5

同理还可以画出关联A、B的一条边；关联A、D的二条边；关联B、D的一条边；关联B、C的一条边，这样就得到如图5的图G。

于是问题转化为一个"一笔画问题"即能否从任何一点开始，一笔画出这个图形，最后回到原来的点，而不重复。

以后将证明此题无解。

说明：在客观世界里的事物，一般视为图G中的点，例如陆地；事物与事物之间的某种特定的联系视为G中的边，例如桥。这样就可以将实际问题抽象转化为图论问题

核：事物$\xrightarrow{\text{转化}}$点；

联系$\xrightarrow{\text{转化}}$边

$\Longrightarrow$问题$\xrightarrow{\text{转化}}$图

3　点的次数

点v的关联边个数称为点v的次数，简称为点v的次，记作$d(v)$

(1) 若$d(v)=1$，则称点v为悬挂点，与悬挂点关联的边称为悬挂边。

(2) 若$d(v)=0$，则称点v为孤立点

(3) 若$d(v)$为奇数，则称点v为奇点；若$d(v)$为偶数，则称点v为偶点

例6　在图5中，求各点的次

解　$d(A)=5$，$d(B)=3$，$d(C)=3$，$d(D)=3$

A、B、C、D它们都是奇点

例7　求证：如下序列不可能是某个简单图顶点的次的

序列

（1）7，6，5，4，3，3，2；

（2）6，6，5，4，3，3，1

分析：只要证明它们各不满足简单图的性质即可。

什么叫简单图？简单图有何性质？

证：（1）简单图G的每个顶点的次$d(v_i)$小于G的顶点个数p。即

$$d(v_i)\leqslant p-1$$

今$p=7$，$d(v_1)=7>7-1=p-1$，矛盾

（2）由于$d(v_1)=d(v_2)=6$且G为简单图，所以v_1，v_2分别与v_3、v_4、v_5、v_6、v_7有关联边。

因此

$d(v_i)\geqslant 2$（$i=3$，4，5，6，7）

与有一点的次为1矛盾。

练习2 求证：序列6，6，6，4，4，3，2不可能是某个简单图的顶点的次的序列

§2 基本性质

1 定理1

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q$$

分析：从一条边产生点的次数着手

证：对于每一条边$\{v_i、v_j\}$，由于关联着两个点v_i，v_j，因此产生点的次数为2

于是

$$\frac{q}{\sum_{v \in V} d(v)} = \frac{1}{2}$$

故 $2q = \sum_{v \in V} d(v)$

说明：定理1不仅适用于简单图，也适用于多重图。不过要注意

(1) 点v每关联一条普通边$\{v_i，v_j\}$时v的次数增加1；

(2) 点v每关联一个环时，v的次数增加2。

例8 求证：在空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边

（1956年北京市数学竞赛试题）

证 （利用反证法）

如果这种多面体存在，则将多面体的面看作图G中的点，有公共边的两个面之连以线各作图G中的边。

于是多面体问题转化为一个图论问题．其中点集为$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，边集为$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$

已知$|V|=p$为奇数，每个面有奇数条边，即G中每个点的次$d(v)$为奇数。

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) \text{为奇数}$$

又由定理1知$\sum\limits_{i=1}^{p} d(v_i)=2q$为偶数，矛盾

故这种多面体不存在。

2 定理2

任一个图中，奇点的个数为偶数

分析：由于奇点的次为奇数，今欲证奇点的个数为偶数，只要证所有奇点的次数和为偶数即可。

证：图G的顶点不外乎奇点和偶点两类。设V_1和V_2分别表示奇点集合与偶点集合，则

$$\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)=\sum_{v\in V} d(v)=2q$$

因为$\sum_{v\in V}d(v)$、$\sum_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$也为偶数

故V_1中的顶点数为偶数。

练习3 证明任何一群人中，认识这群人中奇数个人的人有偶数个

（匈牙利数学竞赛试题）

例9 若简单图G有n个顶点，$n+1$条边，则G中至少存在一个顶点v，$d(v)\geqslant 3$

证（利用反证法）

若对G中任一顶点v_i，都有$d(v_i)\leqslant 2$，则由定理1知

$$2(n+1)=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}2=2n$$

于是$n+1\leqslant n$，矛盾

故存在一点v，$d(v)\geqslant 3$

练习4 求证：若G是简单图，则$q\leqslant\frac{1}{2}p(p-1)$

练习5 若一个简单图G中有n个顶点，$3n+1$条边，则G中至少存在一个顶点v，$d(v)\geqslant 7$

例10 画一个点的次分别是3，3，4，5，5，6的图

分析：（1）此图的顶点个数$p=6$

（2）此图的边数$q=?$

$$\because\quad 2q=\sum_{v\in V}d(v)=3+3+4+5+5+6=26$$

$\therefore q=13$

(3) 由于有一点的次为6，它与其余五个点相连，次数只到5，故此图非简单图，要画此图或者加添多重边或者添环。

(4) 尝试画图

作法1：（对称均匀增次法）

(1) 首先画出v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6各点

(2) 连v_1、v_2，v_3、v_4，v_5、v_6于是各点的次均为1

(3) 连v_1、v_3，v_2、v_4，v_3、v_5，v_4、v_6，v_5、v_1，v_6、v_2于是各点的次再增2，次均为3

不失一般性，可设v_1、v_2是满足次为3的点，以后v_1、v_2不再添关联边。

(4) 连v_3、v_6，v_4、v_5于是v_3、v_4、v_5、v_6各点的次均为4

不失一般性，可设v_3是满足次为4的点，以后v_3不再添关联边。

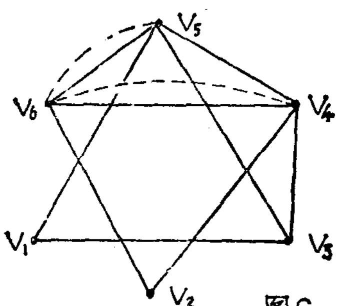


图6

(5) 连v_4、v_6，v_5、v_6于是$d(v_4)=5$，$d(v_5)=5$，$d(v_6)=6$，如图6，则图6即为所求。

作法2：

(1) 画出v_1，v_2，v_3、v_4，v_5，v_6各点

(2) 为了满足d

$(v_1)=3$，可以连 v_1、v_2，v_1、v_3，v_1、v_4，以后v_1 不再添关联边

(3) 为了满足$d(v_2)=3$，可以连v_2、v_3，v_2、v_4，以后v_2不再添关联边

(4) 为了满足$d(v_3)=4$，可以连v_3、v_4，v_3、v_5，以后v_3不再添关联边

(5) 为了满足$d(v_4)=5$，可以连v_4、v_5，v_4、v_6，以后v_4不再添关联边

(6) 为了满足$d(v_5)=5$，可以连v_5、v_6，此时v_5的次为3还少2次，可以加两个多重边$\{v_5, v_6\}$

(7) 为了满足$d(v_6)=6$，可以对v_6加一个环，注意一个环的次为2

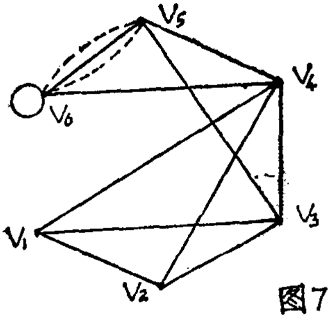


图7

如图7，则图7即为所求

作法3：

(1) 画出v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6各点

(2) 为了满足$d(v_6)=6$，可以连v_1、v_6，v_2、v_6，v_3、v_6，v_4、v_6，v_5、v_6此时v_6的次为5还少1次，不妨加一条多重边$\{v_5, v_6\}$，以后v_6不再添关联边

(3) 为了满足$d(v_5)=5$，可以连v_4、v_5，v_3、v_5，v_2、v_5，以后v_5不再添关联边

(4) 为了满足$d(v_4)=5$，可以连v_3、v_4，v_2、v_4，v_1、v_4，以后v_4不再添关联边

(5) 连v_1、v_8，则$d(v_3)=4$，$d(v_1)=3$

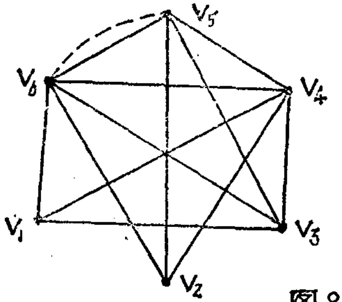


图8

如图8，则图8即为所求

说明：从作法1、2、3 所作的图不同知道，满足题设条件的图很多，读者不妨画几张不同的图。

练习6 画一个有7个顶点的次为4的简单图

例11 有八种药品A，B，C，D，P，R，S，T要放进贮藏室保管，出于安全原因，下列各组药品不能贮藏在同一室内：

$\{A, R\}$，$\{A, C\}$，$\{A, T\}$，$\{R, P\}$，$\{P, S\}$

$\{S, T\}$，$\{T, B\}$，$\{B, D\}$，$\{D, C\}$ $\{R, S\}$，

$\{R, B\}$，$\{P, D\}$，$\{S, C\}$，$\{S, D\}$

问贮藏这八种药品至少需要多少个房间？

分析：(1) 八种药品放到八个房间，肯定安全，因此这个问题的解是存在的。

(2) 现在的问题是要减少房间，求满足要求的最少房间数。

今将问题错综、复杂的关系转化为图，将不难看清脉