

СССР

〔苏〕Н.Б.ВАСИЛЬЕВ·А.А.ЕГОРОВ 著

李墨卿 刘骧 张威勇 李庆胜 陶晓永 译

全苏 数学奥林匹克试题

山东教育出版社

全苏数学奥林匹克试题

[苏]Н.Б.ВАСИЛЬЕВ А.А.ЕГОРОВ著

李墨卿 刘 骧

陶晓永 译

张威勇 李庆胜

杜锡录 审

山东教育出版社

1990年·济南

全苏数学奥林匹克试题
〔苏〕Н.Б.ВАСИЛЬЕВ А.А.ЕГОРОВ著

李墨卿 刘 骥 陶晓永 译
张威勇 李庆胜
杜锡录 审

*

山东教育出版社出版
(济南经九路胜利大街)
山东省新华书店发行 山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 12.625印张 256千字
1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷
印数1—9,000

ISBN 7—5328—1020—8/G·864

定价 3.40 元

序 言

《全苏数学奥林匹克试题》一书的中译本终于和读者见面了。苏联的数学竞赛由来已久，而且水平颇高，这主要是国家的重视，以及老一辈的、杰出的数学家狄龙涅，柯尔莫廓罗夫，拉夫伦杰也夫，李雅普诺夫，亚格龙等的关怀和参与。正因为如此，苏联在历届的国际数学奥林匹克（IMO）中都取得了优异的成绩。

这本习题集中的题目是丰富多彩的，而且是有份量的，其中有传统的中学教材内容的题目，但又不完全是简单的传统中学教学内容和方法的练习；有反映现代数学思想和方法的题目，但又使中学生能做而不感到高不可攀；有些看来远不够规范的杂题，在反映中学生的聪明、机智和训练他们的逻辑思维能力方面起着重要的作用；同时，这些题目能使人们了解到真正的数学——古典的和现代的。

这本习题对我国的数学教育事业和数学奥林匹克事业将起到重要的推动作用。这些题目所包含的内容几乎覆盖了我国现行中学——初中和高中——数学教学大纲的所有内容，几乎包含了我国数学竞赛——初中、高中、冬令营——中的所有内容和方法，因此有重要的参考价值，我曾经用其中的一些题目或经过改造训练过小学高年级学生、初中生、高中生，直至参加IMO的国家代表队，效果很好。因而，这本书对广大中学教师和各级教练员都是十分需要的。

本书后面还附有题目的分类指南，明确指出了一些重要的常用数学内容和方法，其中有些是中学教材中所没有的重要的基本概念，基本理论和方法，在辅导学生参加数学竞赛方面有重要参考价值。

这本书是由李墨卿、刘骧、张威勇、李庆胜和陶晓永老师合译的，他们在百忙中，为了我国的数学奥林匹克事业忘我的工作精神，是值得钦佩的。但由于时间仓促，不足之处在所难免，希望同仁们不吝赐教，其中第22届的题目和解答，采用的是中国科技大学苏淳先生的译文，这里致以诚挚的谢意。

杜锡录1990年10月30日

绪 论

数学的进展往往起于对某个有趣味的问题的研究，而一些有趣的问题，无论在课堂上，在数学小组里，或者在报刊、书籍上都可以找到，各学校，各城市，以及全国的数学奥林匹克竞赛试题，就是这样一种非常丰富的文献资料。

本书收集了从60年代初直至最近一届数学奥林匹克竞赛的全部试题。题目编号是以届为顺序的，在每一届中又是按8，9，10三个年级分别编号的。

对于1961至1979年的每届奥林匹克竞赛题目都作了解答，而对后几届(1980—1987)则只给出了简单的提示。

在60年代的头几届(当时叫做全俄数学竞赛)竞赛题目中的有些难题，对它们要找到解题的钥匙是很困难的。这里，最难的题目都标上了星号。

试题类型很丰富，而且是很很有份量的。几乎每一种试题的版本中都会遇到一些传统的题目，其中有三角形，二次三项式，整数方程和不等式，当然，这些题目如果用传统的中学数学方法作为检验知识的练习，则是不简单的，而最普遍的求最大值或最小值，集合(几何轨迹)，这一类题目的理论则是某些研究所必须的。

然而，那些远不够规范的题目具有更重要的意义。为了寻求解答和证明，不仅需要中学的数学知识，还要有正确的方法，机智、正确的逻辑思维，还要会把特殊的数学条件翻

译成恰当的数学语言。

经常是，虽然可以借助于某些现成的东西（当然，不同于经典的奥林匹克试题）做出解答，但是仍缺少对条件的深刻理解，还远未找到论证方法和正确的指导思想。必需的思考有时出乎意外地产生直观、完美的效果，有如“恍然大悟”一般，这种时刻在数学研究中是很令人激动的。

当然，这些想法，最初是偶而想到的，而后则可以一次又一次地用到。（漂亮精彩之作是第7题——注意，表中所有数的和是变化的）。在第151，196，271及其它一些题目中都证明了某些别的想法也是有益的，而且逐渐地、这些思想方法开始被有意识地作为一种方法来采用。

某些有实用价值的方法不仅对参加奥林匹克竞赛是有益的，而且也是一种有用的解题方法，这也是本书最后所以附上一个题目分类指南的目的之一。这个指南简要地收入了一些中学数学教材中很少有的基本概念、基本理论和方法，收入了一些奥林匹克竞赛的传统的计算方法。这首先是数学归纳法($\Pi 1$)，整数的可除性($\Pi 2$)，多项式($\Pi 5$)，古典算术平均和几何平均不等式($\Pi 8$)，这里 $\Pi 1$ ， $\Pi 2 \dots$ 是指南中的标题。对我们来说，它当然是一个有益的指导。但我们认为，作为一种尝试，采用习题集的形式更能突出它的要领。当然，这本小册子只是在众多的题目和方法中给我们一个非常大概的方向。当我们在试图对每一个题目进行更细致的分类时，会发现其中多数题目都有若干种解法，其余的只能用特殊的解法。

本来，竞赛评委会主要目的是收集各学校最新的试题，但是一直未见他们提出题目、建议和问题。于是，作为评委

的数学家们自己编了一些题目，从自己的同仁那里得到一些，此外还从一些不太著名的书籍和新的科学文章中得到一部分题目。多半是在研究工作中用初等方法得到的一些漂亮的定理和由此产生的一些竞赛试题。象181, 219, 248, 267和别的一些题目就是这样产生的，而148题则是专门为竞赛而设计的。事实证明，它确实符合近世代数的某些新的思想。

常常有一些题目取自一些游戏，而另一些则取自日常生活，有一些试题是作为一种探讨而提出来的，其目的是为了寻求一种适当的计算方法——最大或最小值的最优估计，这是数学上的一个典型问题。

在许多有关零点分布的不等式试题中，专家们一眼就可以看出，它们出自数学分析。在众多的试题中，也有一些非常熟悉而宝贵的循环试题——一些有关图论的定理的变形或特例。特别指出一些多次迭代的运算试题，在很多数学领域又重新引起兴趣，特别是在程序设计，动力系统的理论中。

这样一来，通过奥林匹克竞赛试题就能使人们了解到真正的数学——古典的和现代的。同样，这些试题也多少反映了最新的数学方法，这些方法正逐年变得时兴起来。

当然，在征集每一届试题时，评委们不仅注意到优美的文笔，而且注意了其特殊的科学性。在奥林匹克竞赛中，某些题目需要解4—5个小时。所以在收集试题时应该注意到各年级参赛者的能力和兴趣。而要做到这一点是十分困难的，同时，为了使大多数参赛者得到教益和享受到比赛的乐趣，这又是十分简单和多样化的，大多数参赛者既有几何爱好者，又有代数爱好者和组合逻辑题目的爱好者。在选择试

题时，一些著名的和有趣味的题目，评委们总是按照多年的传统，一届一届传下去。

* * * *

在我国象[61]题这样历史悠久的题目是非常有意思的。这使我们想起 Φ 、马格尼茨基和Л·艾勒的教科书，以及19世纪为数众多的习题集。还有从1894年到1917年先在奥德萨，而后在基辅出版的杂志《实验物理和初等数学通报》，他们的读者——教师，大学生，中学生和专科学校的学生们，提供了相当难的题目《在比赛中》。

苏联第一届中学奥林匹克数学竞赛是在差不多半个世纪以前举行的。在1934—1935年，城市少年数学竞赛在列宁格勒，莫斯科和第比利斯进行，较晚些时候在基辅举行过几届。

战后年代，在学生们中间开展的多种多样的活动（如大学的数学小组，奥林匹克讲座）已扩大到十个城市。50年代末，全国学生首先在数学和物理方面由单纯的趣味性转向了科学性，这促进了第一次宇宙飞行的成功，并推动了技术发展的新浪潮。

现在要确定是谁首先提出把各个城市的竞赛获胜者召集到一起，确实是很困难的。大概这是卓越的数学家鲍里斯·尼古拉耶维奇·狄隆涅以他极大的热情在列宁革勒组织了第一次数学奥林匹克竞赛。1959年秋季，在第比利斯举行了拓扑学年会。在外出游览的汽车上，Б.Н狄隆涅向几位年轻的数学家表达了他的这一设想，这些年轻的数学家当中，包括莫斯科的И.Б.基尔萨诺夫和Л.Б.富克斯，以及当时还在沃洛涅日的А.С.什瓦尔茨。有关各地的获胜者们的传闻流传

很广。为了能参加莫斯科高年级最后阶段的竞赛，一些曾举行过竞赛的加盟共和国或城市中的学生甚至给熟悉的数学家写请求信。而对那些优秀的学生们来说，则总是能接到参赛通知的。

在莫斯科，为了实现这一想法，И.В.基尔萨诺夫特别积极。那时，最积极的中学数学小组领导人之一在莫斯科大学。由于莫斯科大学校长И.Г.彼得罗夫斯基院士和俄罗斯联邦教育部第一副部长，莫斯科大学教授，即后来的教育科学院副院长А.И.马库雪维奇的支持，使这一想法开始成为可能。在这里，同样不能不提出当时的数学教学法专家，俄罗斯联邦教育部长И.С.彼得拉科夫。他对建立奥林匹克竞赛组织做了很多工作。在全俄和全苏奥林匹克竞赛的建立和发展中，А.Н.科尔莫戈罗夫院士起了巨大作用。安德烈·尼古拉耶维奇也是莫斯科奥林匹克和莫斯科大学学生数学小组的领导人之一，当时他还不到30岁。20世纪的大科学家А.Н.科尔莫戈罗夫以其巨大的权威，在60年代对改进数学教育起了巨大影响。这主要是使普通中学的教学大纲和教材现代化，并且由著名大学成立专门的物理—数学寄宿学校。А.Н.科尔莫戈罗夫再三提出的关于在高年级进行微积分教育的想法，即关于为使所有中学生选择他们认为最有趣的研究对象。为了使所有中学生更深入地进行科学研究，而选择他们认为最有趣的研究对象成为可能，А.Н.科尔莫戈罗夫多次提出了关于在中学高年级进行微积分教育的思想，而这一思想还有待实现。由于全俄奥林匹克竞赛组织支持科尔莫戈罗夫的想法，多年来，他一直担任奥林匹克竞赛基础科学的领导人。再后来，当全苏数学、物理及化学奥林匹克中心

委员会建立以后，A.H.科尔莫戈罗夫领导了数学委员会（他领导了60年代，而70年代则由M.H.巴士马科夫和H.B.瓦西里耶夫领导，70年代末，由H.X.洛佐夫和A.H.杰姆里亚科夫领导，到80年代，则由B.B.瓦维洛夫和Ю.Б.涅斯杰连柯领导，该委员会主席从1983年开始由乌克兰科学院院士，莫斯科大学教授Б.Б.格涅坚科担任）

A.H.科尔莫戈罗夫曾几次参加最后阶段的竞赛并担任评委会主席，和委员们一起探讨一些原则性的问题——评委会的组成，竞赛形式，规划试题范围和竞赛次数。安德烈·尼古拉耶维奇经常关心评委会的年轻数学家们，还有为数不少的大学生，他们都是过去竞赛的胜利者。他认真地准备演讲，并仔细分析学生们的题解，奖励取得优秀成果的学生们的教师（都刊登在竞赛的刊物上）安德烈·尼古拉耶维奇痛感，绝不能失去活动能力和“自己的”成果——莫斯科大学的物理—数学寄宿学校的学生们，毫无疑问，A.H.科尔莫戈罗夫院士领导了数学奥林匹克竞赛。他吸收了众多的天才参加到竞赛中来。

于是，1960年春天，一大批来自九个加盟共和国和俄罗斯联邦一些地区的学生，第一次来到莫斯科参加莫斯科数学奥林匹克竞赛。第二年，举行第二届莫斯科数学奥林匹克竞赛的同时，进行了首届全俄数学竞赛：这次竞赛由来自大多数地区和加盟共和国中的每四人组成一个小组（乌克兰产生四个小组），虽然直到1965年都一直由莫斯科领导，但以后的竞赛就已经是完全独立地进行了。最初的参赛者，除了来自莫斯科和列宁格勒，就是来自喀山，基辅，埃里温及别的城市 and 加盟共和国。

从1959年开始，苏联奥林匹克竞赛领导机构决定参加国际奥林匹克数学竞赛，因为苏联学生有效地参加了竞赛，从而成为领导机构的第一个成员。

头几届竞赛在地理范围上逐渐向全国扩大，全国各地区及各加盟共和国都有了自己的奥林匹克数学竞赛，这些竞赛的优胜者将参加最后的决赛。各地的数学家们积极地参与了地方的竞赛和最后的决赛工作。从1960年起，在莫斯科大学和列宁格勒大学之间建立了密切的合作。这不仅涉及到竞赛，而且还涉及到其他形式的学生工作。很多有意义的创举是从西伯利亚开始的，在新西伯利亚的阿卡杰木市，这一年在院士M.A.拉夫伦杰夫和С.П.索波列夫，以及苏联科学院通讯院士A.A.李雅普诺夫领导下，建立了我国亚洲部分的少年数学家物理学家中心。由此，全西伯利亚通讯竞赛在各学生夏令营之间进行。他们中的佼佼者能够进入哈尔科夫大学附设的物理—数学学校。1963年，由一些院士发起，这类学校在莫斯科大学，列宁格勒大学，新西伯利亚大学和基辅大学建立起来，继而在其他加盟共和国也建立了起来，这对奥林匹克数学竞赛的普及是一个不小的促进（各地区及各加盟共和国的奥林匹克竞赛，就是这些学校的入学考试）。

著名的莫斯科物理技术学院积极的共青团员们，在苏联共青团中央的支持下对设立物理奥林匹克竞赛起了很大作用。他们的领导人是青年教师，数学家A.П.萨温（当时他仍是Л.Г.阿斯拉马佐夫，Ю.М.布鲁克和И.И.斯洛包杰茨基的学生）。

假若能够很好地回忆一下，就会知道，在这些繁忙的工作之前他们之间就已建立了有力的联系。然而，问题是，莫

斯科物理技术学院力图建立自己的，从大学生、研究生到教师的物理—数学竞赛体系，并且利用寒假的时间用通讯的方式（邮寄试题和竞赛规则）在各地进行，而最后在莫斯科（当然是在物理技术学院）阅卷。然而在这些城市，多年来已经存在着传统的竞赛。这足以说明，过多的奥林匹克竞赛是不必要的。安德烈·尼古拉耶维奇·科尔莫戈罗夫至今还能回忆起，是列宁格勒人不同意萨温按上述方式进行竞赛。现在，一个唯一的多层次的数学—物理奥林匹克竞赛体系已经建立起来了。它的主要作用是在各地区、各城市、各学校领导当地的大中学校师生进行竞赛。为了更好地领导竞赛，建立了一个中心组织委员会，由教育部、共青团中央和知识学会领导，组织委员会多年以来由著名物理学家И.К.基科因负责，他在自己繁忙的工作中仍积极地参与了所有的竞赛活动和学校工作。

为了使所有参赛者都能按自己的志愿参加比赛，头几届奥林匹克竞赛的决赛几乎同时在莫斯科分别进行：数学在莫斯科大学，物理在莫斯科物理技术学院。

由莫斯科物理技术学院的积极分子们倡议，奥林匹克竞赛的优胜者来到共青团中央的青年营地——《小鹰》夏令营。这样，通过《共青团真理报》、《教师报》及地方青年报纸，对全苏奥林匹克竞赛进行了正常的领导。优胜者被他们邀请参加各共和国和地区的面试（参看〔4, 12, 14, 16, 17〕）。

从莫斯科寄往各地的试题的说明，给了当地竞赛组织者以很大帮助。同样，全国各高等学校的大学生，研究生和教师们作为各地竞赛中心委员会的代表来莫斯科，也成为了一种传

统。他们除了在各地各加盟共和国的评委会工作以外，往往还委托他们许多其它的工作：组织各寄宿学校的入学考试，向学生们介绍各高等学校并组织入学考试，与各地的数学家和教师们商讨有关学校工作的建议，进行演讲。当然，需要一些具有一定经验的人才能完成这些工作。这一切对于大学生和研究生们都具有很大教育意义。他们当中的一部分人，以后将成为学校工作的积极组织者。

应当指出，除了这些青年学者的精力和时间以外，所有这些工作——特别是外出参加竞赛，组织夏令营——还需要一笔不小的资金。事实上，除了政府机关以外，莫斯科大学，莫斯科物理技术学院和其它大学的校长们，高等教育部，科学院，共青团中央和其他一些与学校工作并没有直接关系的组织、团体，也都积极支持这一工作，这一切都反映了在我国，对科学的地位，特别是对科学的发展给予了广泛的注意。稍微将它和现在的广泛的、普遍的热情宣传报导做一下比较（当然并没有本质的区别），是很有意思的。大量的资料说明，在全国范围内仍缺乏对数学有多年预见的经验。

在说到60年代奥林匹克竞赛活动的发展和学校工作的一些新的形式的产生时，还有一个需要提到的题目，这就是教学和科普读物的出现。这期间（很遗憾，直到1962年）出现了以大学生、教师、数学爱好者为对象的很好的期刊《数学教学》，同时也是讨论教学问题的。从30年代起出版了首先以中学生为对象的系列小册子《大众数学》。反映莫斯科大学数学园地经验的《数学园地丛书》已出版到33—40期。由A.H.科尔莫戈罗夫发起的，以初次参赛者为目标的小册子也已经出版。

当谈到中学生读物时，当然不能不说到中学生系列读物《中学物理数学丛书》中的首批出版物〔20〕—〔22〕，是以莫斯科大学全苏数学函授学校学生为对象的极好的参考书。建立这个学校是И.М.盖尔仿德院士的设想。现在他已是这个学校的学术领导人。目前，全苏数学函授学校已经不是一百名寄宿生，而是有上千名，最终将有上万名来自边远地区的学生。

还在60年代中期，就打算为中学生创办一种物理—数学习月刊，但只是到了1970年《量子》这本刊物才开始出版。在其中起主要作用的是一批在奥林匹克竞赛周围形成的数学家和物理学家，他们当中的很多人成了编辑部的积极成员，而И.К.基科因和А.Н.科尔莫戈罗夫院士则是编辑部的长期领导者。（1985年，И.К.基科因逝世后，由Ю.А.奥西皮扬院士接替他担任了《量子》杂志的主编和奥林匹克竞赛中心组委会主席）。《量子》不仅一开始就与竞赛有密切联系，而且竞赛是它的主要内容，使它到处有很多读者和作者。

《量子习题》竞赛的优胜者被邀请参加各加盟共和国的竞赛。在这方面《量子》成为60年代奥林匹克竞赛的主要通讯竞赛。

从1965年到1974这十年，是各加盟共和国首都和俄罗斯某些主要城市进行奥林匹克大赛的时期。1966年在沃罗涅日进行第六届全俄奥林匹克竞赛，这里第一次接待了来自俄罗斯联邦各地区及所有加盟共和国的代表。下一届在第比利斯举行的竞赛已经改名为第一届全苏奥林匹克竞赛。事实上，1961—1966年的全部竞赛都可以称为全苏奥林匹克竞赛，因为它们已经包括了苏联大多数的加盟共和国的代表。从1967

年在第比利斯举行的竞赛开始，已经有了数学，物理和化学三个奥林匹克竞赛。在同一年，苏联教育部开始承担起了竞赛主要组织者的责任。不能忘记教育部长M.A. 普罗科菲耶夫和他的副部长M.И. 孔达科夫对竞赛活动的长期的关心，同时也感谢在这些年中为举行数学竞赛而辛勤工作的教育部工作人员H.A. 叶尔莫拉耶夫和Л.М. 帕什科夫。奥林匹克竞赛虽然已经成为全苏联的竞赛，但它在某些方面还需要进一步扩大。例如，现在参加决赛的4人代表队就来自所有的地区，不只是俄罗斯，而且还来自乌克兰，哈萨克斯坦及其他共和国（按省分配）。此外，为了使实力较强的队取得代表资格的可能性较大，决定补充邀请以前奥林匹克竞赛的优胜者（即一、二等奖获得者）。这样，包括各队领导，25至30人的评委会，演讲人及组委会成员，有时大型竞赛的外来人员的总数将达到800人之多。

以后，竞赛方式有了改变。1968年的竞赛按列宁格勒的惯例试验性地进行了口试：没有答卷，而是由参赛者向评委会的2—3个成员陈述自己的解答。这样，即使有错误，他仍有机会考虑下面的题目（每一道题有三次尝试）。这一系列的作法引起了很多非列宁格勒人的怀疑。因为不同的评委会成员的语言表达方式能带来一些困难，为了使试验在为期两天的比赛的第二天能顺利进行，首先必须恢复笔试。即使这次组织得很周密的口试进行得很顺利并且受到欢迎。但是，如果没有大批有经验的列宁格勒人参加工作，也不可能再进行第二次。

然而，以后所有的竞赛还是按国际规则进行的。为了给第一天偶然失误的参赛者一个机会以修正自己的错误，所以

比赛进行两天。而主要的是充分利用决赛的时间，因为很多参赛者是从小几千里以外赶来的。这种竞赛方式就可能有更多的各种各样的试题被推荐上来。例如，在里加（1971年）比赛的第二天，组委会主席Я.М.巴尔兹金和副主席М.И.巴什马科夫提议设立“研究竞赛”，参赛者们都必须选一个最感兴趣的题目，并且力求得到较好的结果。这一试验得到А.Н.科尔莫戈罗夫的赞赏，并进行得很顺利。以后的一些竞赛也都仿效这种做法（当然，形式上并非完全一样）。

非常遗憾，全苏奥林匹克竞赛没有能实现А.Н.科尔莫戈罗夫屡次提出的想法：利用竞赛中的一天开始向参赛者讲预先不知道的题目，并为这个题目推荐一些习题，而在后来的演讲中再来分析这些题目（这样的演讲，只在1985年举行的第一届全苏数学奥林匹克竞赛上为中等职业技术学校的学生们做过，题目是“几何概率”，讲稿由А.И.普洛特金代读）。

到60年代中期，在准备和进行竞赛中起主要作用的城市数学家已形成一个集体。他们当中有：М.И.巴什马科夫，Ю.И.约宁，А.И.普洛特金（列宁格勒），А.К.托尔佩戈（基辅），Г.И.弗里德曼（新西伯利亚—鄂木斯克），Г.А.托诺扬（埃里温），А.Д.边杜基泽（第比利斯），М.И.谢罗夫（沃洛格达—彼得洛查沃德斯克），К.А.莫罗佐娃，В.М.阿列克谢耶夫，Н.Б.瓦西里耶夫，В.Л.古滕马赫尔，М.С.杜布松，А.А.叶戈罗夫，Б.М.伊夫列夫，Н.Н.康斯坦丁诺夫，Ю.П.雷索夫，Ж.М.拉波特，А.П.萨温，В.А.斯克沃尔佐夫，А.Б.富克斯（莫斯科）。当然，数学委员会和评委会的常设工作人员已经更