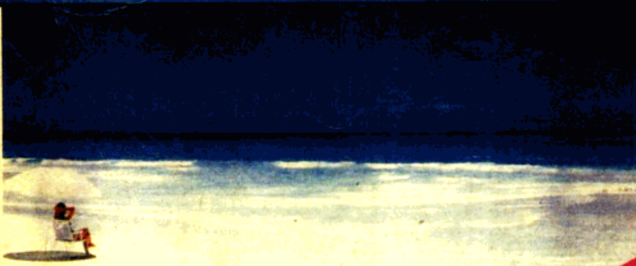

高中数学

知识点分析与能力测试

主编　岑志林

无论考试形式怎样变化
不管教材内容如何改革
但万变不离其宗
那就是各学科的知识点
和能力要点构成的知识体系

NEUPRESS
东北大学出版社

编者的话

中学教育是基础教育，在“会考”与“高考”双重大潮冲击下的中学教学面临着一个新的课题、新的考验：如何依据“大纲”与“考纲”(《考试说明》)组织教学；如何利用教本与拓展教材；如何注重知识更注重能力的培养与测试。因此，广大师生迫切需要一套具有科学性、导向性与实用性的各科教学参考书。

东北大学出版社应广大读者的要求，特邀请辽宁省重点中学、全国名校沈阳二中等校的特级教师、高级教师，各学科带头人主编了《高中知识点分析与能力测试》(含语文、数学、外语、物理、化学)一书，此书是依据 1990 国家教委编写的教学大纲和 1994 年国家考试中心制订的《考试说明》编写的。

本书特点是按本学科自身的知识体系与能力培养的要点，并参照全国高考与省级会考的实践，提炼精选出每一学科每一部分的知识点与能力要点。使学习者有个明晰的界限。

〔知识点分析〕对现行教材中重要的知识点、易错易混的知识点做了详尽分析，有内涵也有外延，在全书中用笔较重，这点与一般课外书对知识点的轻描淡写是一鲜明对比。但又不同于教科书，该书对知识点、能力要点分析直接、明朗、便于学生接受。

〔知识点应用〕所举知识点运用范例，重在“规律性”“注意点”和“类型”。以使读者举一反三、触类旁通、运用自如。

〔能力测试〕意在强化训练，重在新、活、全、精，其中综合

性题目较多，这对训练学生思维灵活性和综合分析能力十分有益。

〔参考答案〕答案准确，较难题有“提示”。

本书可做高中在校各年级学生课外参考书，也可做高三毕业前总复习阶段教材和成人高考做自学教材。教师教学参考也有价值。

本书主编由沈阳二中各学科带头人担任。

《数学》主编：沈阳二中教学副校长、特级教师岑志林。

《语文》主编：沈阳二中高级教师王大中。王老师多次在省电视台做高考辅导讲座。

《物理》主编：沈阳二中物理组组长、高级教师吴万用。

《化学》主编：沈阳二中高级教师郎伟岸。

《英语》主编：沈阳二中外语组组长、高级教师李柱山。

这套丛书是作者多年教学经验的结晶，但是由于水平所限，也定会有不当之处，望同行批评指正。

编　者

1994.6

前　　言

这套书是根据高中数学教学大纲和教材对于基础知识、基本方法和基本能力的要求进行编写的。编写的中心思想是紧紧抓住教材中的“知识点”，对其进行精辟的分析，再通过精选习题，认真剖析、讲清知识点的应用，最后选出有代表性的测试题，以利于巩固、加深，达到灵活运用，培养学生的分析问题和解决问题的能力。

整个内容安排以现行教材的章为编写单位，顺序与现行教材相同，以利于读者在教学或学习中同步使用。

每章都是由[知识点分析]、[知识点应用]、[能力测试]三部分组成。测试题中紧密结合高考题型，分选择题、填空题、解答题三种，参考答案放在各章之后供读者参考。

编者：詹运达（沈阳二中数学组组长、高级教师）、曾放（高级教师）、蔡京南（沈阳二中数学教师）、陶华惠（沈阳二中数学教师）、岑志林（二中副校长，特级教师），全书由岑志林老师主编。本书是我们多年教学经验结晶，希望能为读者带来效益。尽管我们进行了认真的编、校，但由于时间很紧，定会有不足与错误，热望广大读者批评指正。

编　者

1994 年 7 月

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

本章主要内容有集合。子集、交集、并集、补集。映射与函数，函数的单调性、函数的奇偶性。反函数的概念与图象。幂函数、指数函数、对数函数。简单的指数方程和对数方程等，共 13 个知识点。

1.1　集合

一、知识点分析

本单元要求理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合。除上述要求外，还应注意以下几点：

1. 构成集合的元素必须满足确定性、互异性。

2. 元素与集合之间的关系是“属于”或“不属于”的关系。即元素 a 与集合 A 中，$a\in A$ 或者 $a\notin A$。集合与集合之间的关系有包含、相等、不包含等关系。空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$。

3. 掌握集的基本运算

(1) $A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$；

(2) $A\cup B=\{x\mid x\in A，或\ x\in B\}$；

(3) $\overline{A}=\{x\mid x\in I，且\ x\notin A\}$。

4. 能运用文氏图解决有关的问题

二、知识点应用

例 1　设 $I=\{1,2,3,4,5\}$，且 $A\subset I,B\subset I,A\cap B=\{2\},\overline{A}\cap B=\{4\},\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,5\}$，则下列结论正确的是（　）

(A) $3\in A,3\in B$　　　　(B) $3\in\overline{A},3\in B$

(C) $3\in A,3\in\overline{B}$　　　　(D) $3\in\overline{A},3\in\overline{B}$

分析：由(A)可知 $3\in A\cap B$ 与 $A\cap B=\{2\}$ 矛盾；由(B)可知 $3\in\overline{A}\cap B$ 与 $\overline{A}\cap B=\{4\}$ 矛盾；由(D)可知 $3\in\overline{A}\cap\overline{B}$ 与 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,5\}$ 矛盾。排除(A)、(B)、(D)，故应选(C)。此题也可运用文氏图解答，由图 1-1 易知 $3\in A,3\in\overline{B}$。

例 2　设集合 $A=\{x|x\leqslant 2\sqrt{3}\}$，又 $a=\sqrt{11}$，则

(A) $a\subset A$　　　　(B) $a\notin A$

(C) $\{a\}\in A$　　　　(D) $\{a\}\subset A$

分析：由元素与集合的关系排除(A)，由集合与集合的关系排除(C)。$\because\sqrt{11}<\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\therefore a\in A$，于是应选择(D)。

例 3　设 S、T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T,T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于（　）

(A) X　　　(B) T　　　(C) $\varnothing$　　　(D) S

分析：本题给定两个抽象的集合 S，T。运用文氏图解决此类型的题较为直观。若 X 非空，见图(1-2a)；若 X 是空集，见图(1-2b)，不难得出正确的结论，即 $S\cup X=S$，故应选(D)。

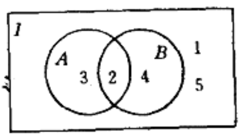

图 1-1

另解：$\because X=S\cap T$　$\therefore X\subseteq S$，于是 $X\cup S=S$

例 4　设集合 $A\subseteq B,A\subseteq C$ 且 $B=\{0,1,2,3,4,5\},C=\{0,2,4,6,8\}$，则集合 A 的个数是（　）

(A) 4　　　(B) 8　　　(C) 16　　　(D) 32

分析：由 $A\subseteq B,A\subseteq C$ 知 $A\subseteq B\cap C$，又 $B\cap C=\{0,2,4\}$，所以满足

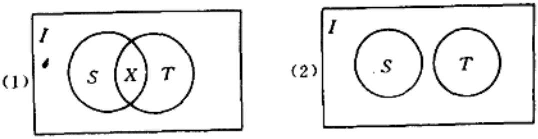

图 1-2

条件的集合 A 有：$\varnothing\{0\}$、$\{2\}$、$\{4\}$、$\{0,2\}$、$\{0,4\}$、$\{2,4\}$、$\{0,2,4\}$。共 8 个，故应选择(B)。

一般地，若集合 S 中含有 n 个元素，则集合 S 的子集有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个。

例 5 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$ 且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 x 的个数有(　)

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

分析：由 $A\cup B=\{1,3,x\}=A$ 知：$B\subseteq A$，于是有 $x^2=3$ 或者 $x^2=x$，解得 $x=\pm\sqrt{3}$ 或者 $x=0$ 或 $x=1$，若 $x=1$，则与集合元素的互异性矛盾，所以满足条件的实数 x 有 3 个。本题选(C)。

例 6 已知 $A=\{x|2x^2+x+m=0\}$，$B=\{x|2x^2+nx+2=0\}$ 且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，求 $A\cup B$。

分析：集合 A、B 分别是方程 $2x^2+x+m=0$ 与方程 $2x^2+nx+2=0$ 的解的集合。$\because A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，$\therefore \frac{1}{2}$ 既是方程 $2x^2+x+m=0$ 的解又是方程 $2x^2+nx+2=0$ 的解。所以可解得 $m=-1$，$n=-5$。由韦达定理可知方程 $2x^2+x+m=0$ 的另一解是 -1，方程 $2x^2+nx+2=0$ 的另一解是 2。所以 $A\cup B=\{\frac{1}{2},-1,2\}$。

例 7 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$ 且 $A=B$，求 x 与 y 的值。

解：由题知：$x\neq0$ 且 $y\neq0$，否则 $\lg(xy)$ 无意义。又 $A=B$，$\therefore \lg(xy)=0$，$\therefore xy=1$ 即 A 中含有元素 1。由 $A=B$ 可知 $y=1$ 或 $|x|=1$，若 $y=1$ 则 A 中有两个元素相同，与集合的元素的互异性矛盾。故有 $|x|=1$，若 $x=1$ 则有 $x=xy=1$，$\therefore y=1$ 不合题意，故 $x=-1$，此时 $y=-1$，所

以 $x=-1, y=-1$ 为所求。

例 8 集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，求 a 取何实数时，$A\cap B\supset\varnothing$ 与 $A\cap \cancel{B}$ C $=\varnothing$ 同时成立？

分析：由题可知 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$，由 $A\cap B\supset\varnothing$ 知 $A\cap B$ 非空，即 2 或 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，又 $A\cap C=\varnothing$ 知 2 和 -4 都不是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，所以 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解。

解：$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$

$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{2,-4\}$

由 $A\cap B\supset\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 知 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，将 3 代入方程得 $a^2-3a-10=0$，解得

$a=5$ 或 $a=-2$

当 $a=5$ 时 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，此时 $A\cap C=\{2\}$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾。

当 $a=-2$ 时，$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$ 满足 $A\cap B\supset\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$，故 $a=-2$ 为所求。

三、知识点练习

选择题：

1. 如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么 $\overline{M}\cap\overline{N}=$ (A)。

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$

(C) $\{a,c\}$　　(D) $\{b,e\}$

2. 已知集合 $P=\{x|x<2\}$，$Q=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $P\cup Q=$ (C)。

(A) $\{x|-1\leqslant x<2\}$　　(B) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$

(C) $\{x|x\leqslant 3\}$　　(D) $\{x|x\geqslant -1\}$

3. 设 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{10}\}$，$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，那么 (D)。

(A) $a\subset M$　　(B) $a\notin M$

(C) $\{a\}\in M$　　(D) $\{a\}\subset M$

4. 集合$M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$

$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$，则(C)。

(A) $M=N$　　(B) $M\supset N$

(C) $M\subset N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

5. 集合$\{0\}$与$\varnothing$的关系是(D)。

(A) $\{0\}=\varnothing$　　(B) $\{0\}\in\varnothing$

(C) $\varnothing\in\{0\}$　　(D) $\varnothing\subseteq\{0\}$

6. 设非空集合 $M\subset N\subset I$(I 为全集)，则下列集合中表示空集的是

A。

(A) $M\cap\overline{N}$　　(B) $\overline{M}\cap N$

(C) $\overline{M}\cap\overline{N}$　　(D) $M\cap N$

B; 7. 设全集 $I=\{(x,y)|x、y\in R\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=$

$\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么$\overline{M}\cup\overline{N}$等于(B)。

(A) $\varnothing$　　(B) $\{(2,3)\}$

(C) $(2,3)$　　(D) $\{(x,y)|y=x+1\}$

D 8. 设全集为 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=$

$\{x|g(x)\neq 0\}$，那么集合$\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}$等于( )。A

(A) $\overline{M}\cap\overline{N}$　　(B) $\overline{M}\cup N$

(C) $M\cup\overline{N}$　　(D) $\overline{M}\cup\overline{N}$

A

9. 设 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x<a\}$，若 $A\subset B$，则 a 的取值范围

是( )。

(A) $[2,+\infty)$　　(B) $(-\infty,1]$

(C) $[1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,2]$

D 10. 若集合 $M=\{y|y=2^x,x\in R\}$，$N=\{y|y=x^2,x\in R\}$，则( )。

(A) $M\cap N=\{2,4\}$　　(B) $M\cap N=\{4,16\}$

(C) $M\supset N$　　(D) $N\supset M$

11. 集合 $M=\{x|x>2\}$，$N=\{x|x<3\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in N$”是“$x\in M\cap N$”的( )。

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 非充分条件也非必要条件

12. 设全集 $I=\{2,3,5\}$，$A=\{2,|a-5|\}$，$\overline{A}=\{5\}$，则 a 的值是（ ）。

(A) 2　　(B) 8

(C) 2 或 8　　(D) -2 或 8

填空题：

1. 已知集合 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，若 $B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{a,d\}$，则集合 A 的真子集最多是________个。

2. 已知全集 I 是实数集 R，$A=\{x|\sqrt{x-1}<3\}$则$\overline{A}=$________

3. 设全集 $I=R$，$A=\{x|\sqrt{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\lg(x^2-2)=\lg x\}$，则 $A\cap\overline{B}=$________

4. 设含有 4 元素的集合的全部子集数为 S，其中含有 2 个元素的子集数为 T，则 $\dfrac{T}{S}$ 的值为________。

解答题：

1. 已知实数集 $A=\{2,3,a^2+4a+2\}$，$B=\{0,7,2-a,a^2+4a-2\}$且 $A\cap B=\{3,7\}$，求集合 B。

2. 若 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0,x\in Z\}$，$B=\{0,4,5\}$，$I=\{x|\ |x-1|\leqslant 4,x\in Z\}$，(1)求$\overline{A}\cup B$，$A\cap\overline{B}$，(2)求集合 A 的子集的个数。

3. 对于实数集 $A=\{x|x^2-2ax+(4a-3)=0\}$ 和 $B=\{x|x^2-2\sqrt{2}ax+(a^2+a+2)=0\}$是否存在实数 a 使 $A\cup B=\varnothing$？若 a 不存在，说明理由；若 a 存在，求 a 的值。

1、$2-a=3$ 或 $a^2+4a-2=3$，$a=-1$ 或 $a=1$ 或 $a=-5$　$a=-1$

2、

1.2 映射与函数

一、知识点分析

本单元要求了解映射的概念，在此基础上加深对函数有关概念的理解。掌握互为反函数的图象之间的关系。理解函数单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性描绘函数的图象。

1. 映射　映射是一种特殊的对应；映射允许集合 A 中的不同元素在集合 B 中有相同的象；映射允许集合 B 中有的元素在集合 A 中没有原象。例如，设集合 $A=\{a, b\}$，集合 $B=\{1, 2\}$，则从集合 A 到集合 B 的映射有 4 个，如图 1-3：

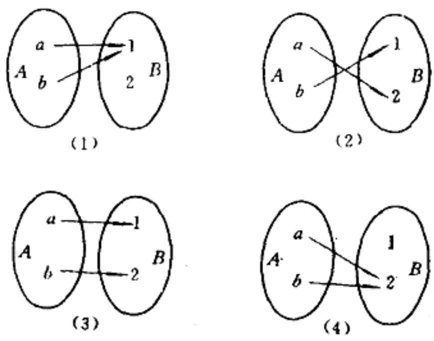

图 1-3

不难看出（1）中，集合 A 中的元素 a、b 在集合 B 中有相同的象；集合 B 中的元素 2 在集合 A 中没有原象。

2. 一一映射　设 $f: A\to B$ 是映射，则对于 A 中的不同元素在集合 B 中有不同的象，且 B 中的每一个元素都有原象，则这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射，例如上例中的（2），（3）都是从集合 A 到集合 B

上的一一映射。

3. 逆映射　设 f: $A \to B$ 是 A 到 B 上的一一映射，如果对于集合 B 中的每一个元素都使它在 A 中的原象和它对应，这样得到的映射叫做映射 f: $A \to B$ 的逆映射，记作 f^{-1}: $B \to A$。从一一映射及逆映射的定义可知：

(1) 一个映射存在逆映射的充要条件是这个映射是一一映射。

(2) 一一映射 f_1: $A \to B$ 与 f_2: $B \to A$ 互为逆映射。

4. 函数　高中教材中函数的概念是用映射来刻划的。值得注意的是：(1) 函数是一类特殊的映射，集合 A、B 是非空数集；(2) 确定函数的映射是从定义域 A 到值域 B 上的映射。即允许 A 中的不同元素在 B 中有相同的象，但不允许集合 B 中的元素在 A 中没有原象；(3) 两个函数相同，必须定义域、值域、对应法则分别相同。

5. 反函数　函数 $y=f(x)$ 有反函数的条件是确定函数的映射 f: $A \to B$ 是从 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一、一映射。那么这个映射的逆映射 f^{-1}: $B \to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数。例如函数 $y=x^2$，$x \in R$ 在其定义域上不存在反函数，而在 $(-\infty, 0)$ 上反函数为 $y=-\sqrt{x}$。

6. 函数的单调性　研究函数的单调性必须给定区间。例如函数 $y=\frac{1}{x}$，它在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，在 $(0, +\infty)$ 上也是减函数，但不可以说函数 $y=\frac{1}{x}$ 是减函数。因此函数的单调性是对某个区间而言的。对于单独的一点，由于它的函数值是唯一确定的常数，因而没有增减变化，所以也不存在单调性问题。

7. 函数的奇偶性　研究函数的奇偶性首先考虑函数的定义域，只有当函数的定义域在数轴上所示的区间关于原点对称，这个函数才可能具有奇偶性，例如函数 $y=x^2$，$x \in (-2, 2]$，它既不是奇函数，也不是偶函数。

二、知识点应用

例 1　点 (x, y) 在映射 f 下的象是 $(2x-y, 2x+y)$，求点 $(4, 6)$ 在映

射下的原象。

解：由$\begin{cases}2x-y=4\\2x+y=6\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=1\end{cases}$ 所以点(4,6)在映射 f 下的原象是点$(\frac{5}{2},1)$.

例 2 设集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，写出从集合 A 到集合 B 的映射及一一映射的个数。

解：从集合 A 到集合 B 的映射有 $3\times3\times3=27$ 个，集合 A 中元素 a 的象可能是 1,2,3 中的任一个，共有 3 种取法，同理集合 A 中的元素 b，c 的象也分别有 3 种取法，根据乘法原理，为使集合 A 中的任何一个元素在 B 中都有唯一的元素和它对应共有 $3\times3\times3=27$ 种方法，所以从集合 A 到集合 B 的映射有 27 个。

从集合 A 到集合 B 上的一一映射有 6 个，它们分别是图 1-4 所示：

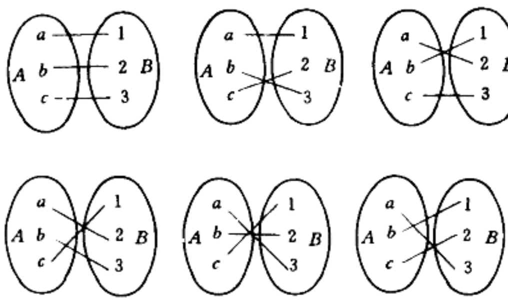

图 1-4

一般地，设集合 A 中有 m 个元素，集合 B 中有 n 个元素，则从集合 A 到集合 B 的映射共有 n^m 个。

例 3 下列函数 $f(x)$，与 $g(x)$是否表示同一个函数？为什么？

(1) $f(x)=(x-1)^0$ 与 $g(x)=1$

(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=(x+1)^2$

(4) $f(x)=e^{\ln x}$与$g(x)=\dfrac{x^2}{(\sqrt{x})^2}$

分析:(1)中$f(x)$与$g(x)$的定义域不同;(2)中$f(x)$与$g(x)$的值域不同;(3)中$f(x)$与$g(x)$的对应法则不同,所以它们都不表示同一个函数,只有$f(x)=e^{\ln x}$与$g(x)=\dfrac{x^2}{(\sqrt{x})^2}$的定义域、值域、对应法则都相同才表示同一个函数。

例4 已知$f(x+1)=x^2-1$,求$f(x)$的表达式

分析:函数是一类特殊的映射,由题知$x+1$的象是x^2-1,现求x的象,即$f(x)$的表达式。

解法一:令$x+1=t$,则$x=t-1$,于是有

$f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t$,即$f(x)=x^2-2x$

解法二:$f(x+1)=x^2-1=(x+1)^2-2x-2$

$=(x+1)^2-2(x+1)$ $\quad\therefore f(x)=x^2-2x$

解这类问题一般有两种思路:(1)换元,例如解法一;(2)构造,例如解法二。

例5 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

(2) $y=\sqrt{x+5}\cdot\log_2(36-x^2)$

(3) $y=\sqrt{-\lg(1-x)}$

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\log_a(x+a)}}(a>0,a\neq1)$

解:(1)解不等式组$\begin{cases}4-x^2\geqslant0\\x-1\neq0\end{cases}$得$-2\leqslant x<1$或$1<x\leqslant2$

故所求函数定义域是$[-2,1)\cup(1,2]$

(2)解不等式组$\begin{cases}x+5\geqslant0\\36-x^2>0\end{cases}$,得$-5\leqslant x<6$

故所求函数定义域为$[-5,6)$

(3)**解**:由$-\lg(1-x)\geqslant0$得$\lg(1-x)\leqslant0$,$\therefore 0<1-x\leqslant1$

得$0\leqslant x<1$,故所求函数定义域为$[0,1)$。