高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark 星火书业

高等数学辅导

（与同济五版教材配套）

上、下册合订本

同济大学 彭辉 主编

联系考研，渗透精讲历年考研真题

知识体系表解

- 考点精讲
- 题型归纳 典型例题透析
- 技巧点拨 思路方法梳理

最新修订

第2版

新华出版社

高等院校数学教材同步辅导及考研

Spark 星火书业

高等数学辅导

（与同济大学第五版《高等数学》配套）

上、下册合订本

主　编　彭　辉　马顺业　马　燕
副主编　王　剑　于文华　耿红玲　张　颖

新　华　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导:同济第五版/彭辉等主编. —北京:新华出版社，2004.8

ISBN 7-5011-6751-6

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 彭...　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 075014 号

高等数学辅导:同济第五版

彭　辉　主编

*

新 华 出 版 社 出 版 发 行

(北京市石景山区京源路 8 号　邮编:100043)

新 华 书 店 经 销

德州文源印务有限公司印刷

*

880×1230 毫米　32 开本　27.00 印张　680 千字

2004 年 9 月第 1 版　2005 年 8 月第 2 版

ISBN 7-5011-6751-6/G・2451　定价:26.80 元

前言

高等数学是理工科院校一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用。特别是经过多次修订后的第五版，结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在讲授数学基础知识的同时，又注意提炼和渗透数学思想方法。为帮助读者学好该书，我们根据无数大学生学习此书反馈的信息和历届本科毕业生考研的深刻体会，编写了这本与同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第五版）（以下简称《教材》）配套的《高等数学辅导》。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法，提高应试能力和数学思维水平。

本书共分十二章，每章又分若干节。章节的划分和标题与《教材》一致。每节内容分三部分编写：一、内容简析；二、题型・例题・方法；三、教材习题全解。每章最后一节编写完后，另增加三部分内容：四、本章知识结构及内容小结；五、教材总习题全解；六、同步自测题及参考答案。“内容简析”主要对本章涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理；提出深入理解基本概念和定理需要注意的问题；解答读者学习中可能出现的疑难问题；特别指出各类考试中经常考查的重要知识点。“题型・例题・方法”主要对本章涉及的习题按内容划分为几个基本题型，对每个基本题型选择大量的不同难度、不同风格的例题。有些例题选自近年考研试题。通过例题讲解，探索主要解（证）题思路，提炼基本解（证）题方法和常用技巧；有的还作了同类题目解（证）法小结和方法点击。对教材中的全部习题作了解答。书中用“警示语”的形式对解题要点、技巧、关键和易错的地方作了简短警示。“同步自测题”设计了各类考试中经常考的基本题和综合题，有些题目选自历年全国研究生入学考试试题。

本书的编写力求突出以下几个特点：

一、对基本知识力求系统化，便于学习者整体地理解和掌握知识，在头脑中形成清晰、稳固的认知结构，这是提高解题能力和数学思维水平的基础。

二、精选典型例题，重在分析思路和提炼方法，并在灵活性、严密性、准确性、简捷性诸方面作出表率，真正提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题能力。

三、顺应知识经济时代的新要术和素质教育的新形势，力求在讲解基本知识的过程中渗透数学思想方法；通过例题讲解、习题解答及自测题练习，在提高读者的解题能力、应试能力的同时，提高其综合数学素养。叙述力求通俗又不失严谨，思路力求清晰又不失完整，解法力求简炼又不失灵活，内容分析力求系统、透彻又力戒空洞、繁杂，使本书不仅成为在读大学生同步学习的优秀辅导书，又是广大教师的得力数学参考书，还可为本科毕业生考研复习和众多成人学员（函授生、夜大生、电大生、业大生、在职自学者）自学提供富有成效的帮助。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此，向这些书籍的编著者表示感谢；由于作者水平有限，不足之处，在所难免。诚恳希望阅读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

作者
2005 年 8 月于上海

目　录

第一章 函数与极限

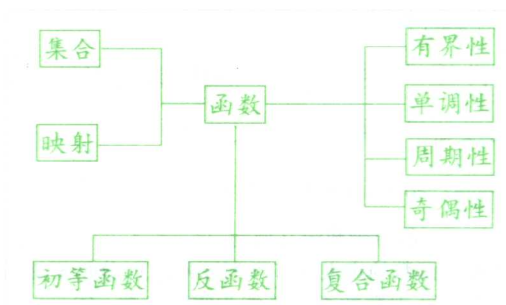
本章首先学习函数及其相关概念，并介绍函数的基本性质和常见初等函数；接着讨论数列、函数的极限，包括极限定义的各种形式和求几种不同形式极限的常用方法；然后介绍无穷小量和无穷大量，包括无穷小量的比较；最后说明函数的连续性，并介绍利用连续函数的性质求解一些常见问题的方法.

函数是高等数学的研究对象. 极限的方法是研究函数的基本方法，贯穿于高等数学的始终，它是初等数学与高等数学的分水岭. 因此，理解函数的概念，掌握极限的理论是学好高等数学的基础.

第一节 映射与函数

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数，且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减). 反之，有反函数的函数未必一定是严格单调函数，$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$与$y=f(x)$表示同一条曲线，若用x表示自变量，y表示因变量，则$y=f^{-1}(x)$及$y=f(x)$的图像关于直线$y=x$对称，$f^{-1}(x)$的定义域即为f的值域.

2. 两个奇函数的和或差仍是奇函数；两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数；两个奇函数的积商(除数不为0)为偶函数；一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.

3. 分段函数是特别要注意的一类函数，它用几个不同解析式“分段”表示一个函数. 所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能

在端点处重合，重合时对应的函数值应该相等. 图像分段的函数不一定是分段函数，分段函数的图象也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

4. 复合函数可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成. 但是并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y=f(u)$, $u\in D$, 内层函数 $\mu=g(x)$, $x\in E$ 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时，即 $E^*=\{x\mid g(x)\in D, x\in E\}\neq\varnothing$ 时，两个函数才能复合. 例如，$y=\sqrt{u^2-2}$, $u=\sin x$ 就不能复合成 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$.

5. 本节的难点是复合函数，重点是分段函数. 考研中常出现的题型是求复合函数，特别是求分段函数的复合函数，方法主要有 3 种：代入法、分析法和图示法.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ：求函数定义域

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

(2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

解：(1) 由题意 $\begin{cases} x^2-1>0. \\ x+1\neq 0. \\ \left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1. \end{cases}$ 由 $x^2-1>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>1$.

由 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1$，得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 0$，故定义域为 $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

(2) 由对数定义知：$\dfrac{5x-x^2}{4}>0$，即 $0<x<5$，

当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时，函数有定义. 即 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，

可知 $1\leqslant x\leqslant 4$，故原函数定义域为：$1\leqslant x\leqslant 4$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则：① 分母不能为零. ② 偶次根式的被开方数不能为负数. ③ 对数的真数不能为零或负数. ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$. ⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$, $k\in Z$. 求复杂函数的定义域，通常将复杂函数看成一系列初等函数的复合，然后考查每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可以得到复合函数的定义域.

例 2 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.(考研题).

【思路探索】 由题目条件设法求出 $\varphi(x)$ 的函数表达式，然后再求出 $\varphi(x)$ 的表达式.

解：由 $f(x)=e^{x^2}$，知 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$，又 $\because f(\varphi(x))=1-x$.

$\therefore e^{\varphi^2(x)}=1-x$，于是 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，再根据 $\varphi(x)\geqslant 0$，

可知：$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 因此 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x)\geqslant 0$.

即 $x\leqslant 0$ 或 $(-\infty,0]$.

通过替换和函数表示法的变量无关性得表达式.

基本题型Ⅱ：求函数表达式

例3 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}$ $(a,b,c$ 均为常数，且 $|a|\neq|b|)$，求 $f(x)$.

解：$af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}$ ①

取 $x=1-t$，则 $t=1-x$，

故 $af(1-t)+bf(t)=\frac{c}{1-t}$

所以 $af(1-x)+bf(x)=\frac{c}{1-x}$ ②

联立①、②得到：$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-\frac{bc}{1-x}\right)$.

代换法，函数表示法的变量无关性.

【方法点击】 含有未知函数的方程叫做函数方程，观察法和变量代换法是解简单函数方程的两种最基本的方法. 本题综合运用了代换法和方程的思想.

例4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$，求 fog.

解：$fog(x)=f[g(x)]=\begin{cases}1, 当|g(x)|\leqslant 1\\ 0, 当|g(x)|>1.\end{cases}$

先看 $|g(x)|\leqslant 1$，显然此时要求 $|x|\leqslant 2$，否则与 $g(x)=2$ 矛盾. 得：$\begin{cases}|x|\leqslant 2,\\ |2-x^2|\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ \{-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1\}\cup\{1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}.\end{cases}$

取交集可得 $x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$.

再考查 $|g(x)|>1$，其中包含两部分，

$\{|g(x)|>1\}\cap\{|x|\leqslant 2\}$ 或 $\{|x|>2\}$. 解第一组不等式得：

$x\in[-2,-\sqrt{3}]\cup(-1,1)\cup[\sqrt{3},2]$.

解第二组不等式可得：$x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

综合得，当 $|g(x)|>1$ 时，$x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

于是 $fog(x)=\begin{cases}1, & 当 x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}].\\ 0, & 当 x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty).\end{cases}$

【方法点击】 一般情况下，写区间的并集时，按数轴的顺序，从左到右依次排列，这样结合数轴，会有一个较直观的印象.

小结：复合函数的求解方法主要有三种：

a) 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替，适用于初等函数的复合.

b) 分析法:抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.

c) 图示法:ⅰ. 画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图像;ⅱ. 将 $y=f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出;ⅲ. 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间;ⅳ. 将ⅲ所得的结果代入 $y=f(u)$ 中,便得到复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间. 适用于两分段函数的复合.

基本题型Ⅲ:求反函数

例5 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1.\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2.\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.(考研题)

【思路探索】 本题为分段函数,因此要分区间讨论它的反函数表达式.

解: 当 $-\infty<x<-1$ 时,$y=1-2x^2$,得到 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-y}$,$-\infty<y<1$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^3$,得到 $x=\sqrt[3]{y}$,$-1\leqslant y\leqslant 8$.

注意符号的变化.

当 $2<x<+\infty$ 时,$y=12x-16$,

得到 $x=\dfrac{y+16}{12}$,$8<y<+\infty$,

所以反函数为 $y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}, & -\infty<x<-1.\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8.\\ \dfrac{x+16}{12}, & 8<x<+\infty.\end{cases}$

【方法点击】 反函数求解方法比较固定,具有很强的程序性,关键是把握好定义域和符号的变化,特别是对于分段函数要牢记所求函数表达式的区间.

基本题型Ⅳ:把复合函数分解为基本初等函数的复合

例6 把 $y=\arctan[a^x\sqrt{1-x^2}+\ln(x^2+2)]$ 表示成基本初等函数的复合.

解: 设 $u_1=1, u_2=x^2, u_3=a^x, u_4=\ln x, u_5=2$,

$f=\arctan x$,

$g=\sqrt{x}$,则 $y=f\cdot[u_3\cdot \lg\cdot(u_1-u_2)+u_4\cdot(u_2-u_5)]$.

由指数函数对数函数、三角函数复合而成.

【方法点击】 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础,而由里到外,逐级分解是解决问题的关键. 做题时不能跨越某个级别,漏掉某个基本初等函数,要分清复合函数的成分或结构.

基本题型Ⅴ:函数有界性的问题

例7 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为( ).

(A) 有上界无下界 (B) 有下界无上界

(C) 有界,且 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$ (D) 有界,且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$

【思路探索】 解选择题的方法很多，比如特殊值法，排除法等，要根据题目的特点，灵活选取.

解：$|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$

利用 $1+x^2\geqslant 2|x|$ 进行放缩.

故应选 C.

【方法点击】 证明函数有界的常用方法：

① 利用函数有界性的定义，对函数取绝对值，然后对不等式进行放缩处理.

② 采用导数求最值的方法.

③ 根据连续函数的性质.（②、③例题见后续相应章节.）

基本题型Ⅵ：函数单调性的问题

例 8 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减小，证明：对任意两点 $x_1>0,x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【思路探索】 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调是唯一的条件，因此要从 $\dfrac{f(x)}{x}$ 出发，逐步构造和结论联系的桥梁.

证明：不妨设 $x_1\leqslant x_2$，故有：$\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$

$\dfrac{f(x)}{x}$ 单降.

$\therefore x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$，又 $\because x_2<x_1+x_2$，则：

$\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}$.

$\therefore x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_1)\leqslant x_2(f(x_2)+f(x_1))$

即 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【方法点击】 单调性是函数的一个性质，充分利用单调性的定义，结合不等式的放缩技巧可以得出许多有用的结论.

例 9 判断函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的单调性.

解：$\forall x_1,x_2\in(0,\pi),x_1<x_2$，

$\because \cos x_2-\cos x_1=-2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}$，

三角函数公式是重要工具.

由于 $x_1<x_2$，故有 $0<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\pi,0<\dfrac{x_2-x_1}{2}<\pi$，

$\therefore \sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0,\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$，设 $\cos x_2-\cos x_1<0$，

即 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减.

【方法点击】 证明函数单调性的主要方法有：

① 利用函数单调性定义.

② 利用导数证明.

第1章

基本题型Ⅶ：函数奇偶性问题

例10 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且对 $\forall x、y$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$.
证明 $f(x)$ 为偶函数.

【思路探索】 判断函数的奇偶性关键要考查 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的关系，因此紧盯住这一目标，对条件进行变形是解决问题的入手点.

证明： 由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，用 $-y$ 代 y 得：

$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y)$，得 $2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$，

又因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(y)=f(-y)$，∴ $f(x)$ 为偶函数.

【方法点击】 判断函数奇偶性通常采用的方法有：

① 从定义出发，或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等等).

② 证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

基本题型Ⅷ：函数周期性问题

例11 设 $a<b$，函数 $f(x)$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$. 证明：$f(x)$ 为周期函数.

证明： $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(x+2b-2a)=f(b+x+b-2a)=f(b-(x+b-2a))$$
$$=f(a+a-x)=f(a-(a-x))=f(x).$$

∴ $f(x)$ 是周期函数，$2b-2a$ 是它的一个周期.

【方法点击】 判定函数为周期函数的主要方法：① 从定义出发，找到 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$. ② 利用周期函数的运算性质证明.

解决此类问题的关键是首先猜想到一个周期 T，这就要求具备较强的恒等变形能力与观察能力.

例12 已知函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 是周期函数，求其最小正周期.

【思路探索】 周期函数的最小正周期不一定是其各部分周期的最小公倍数. 应该从周期的定义出发去寻找最小正周期.

解： 设 T 为 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期，则：$|\sin x|+|\cos x|=|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|$.

观察是很重要的方法.

观察等式两边可知 $T=\frac{\pi}{2}$ 时等式成立.

【方法点击】 作出函数的图像，通过直观观察也是求周期的一种方法，请读者自己体会、验证.

三、教材习题解答（教材上册 P_{21}，习题1-1）

1. **解：** $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

$A\cap B=[-10,-5)$，$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$

$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

2. **证明：** $(\Rightarrow)$. 设 $\forall a\in(A\cap B)^c$ ∴ $a\notin A\cap B$. ∴ $a\notin A$ 或 $A\notin B$