

初一年级

数

学

通用各科 奥林匹克教材

数学奥林匹克工作室 编

首都师范大学出版社

tongyong geke
aolinpike
jiaocai

奥林匹克

OLYMPIC

通用各科 奥林匹克教材

数学奥林匹克工作室 编

初一年级数学

奥林匹克

首都师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

通用各科奥林匹克教材:初一数学/吴建平主编. —北京:
首都师范大学出版社, 2000. 1

ISBN 7-81064-091-7

I. 通… II. 吴… III. 数学课-初中-教材 IV. G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 65125 号

TONGYONG GEKE AOLINPIKE JIAOCAI
• CHUYI NIANJISHUXUE

通用各科奥林匹克教材

初一年级数学

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)
北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 3 月第 2 次印刷
开本 850×1168 1/32 印张 6.375
字数 161 千 印数 15,001~36,000 册
定价 7.60 元

编 委 会

主编:	吴建平	李念伟	
编委:	方运加	李念伟	吴建平
	邵舒竹	董凤举	
编者:	王 忠	无 边	尹克新
	刘汉昭	刘向军	李念伟
	关 閔	陈 嫻	吴 易
	张 丽	张燕勤	欧 丽
	赵维民	夏国生	

目 录

第一学期	(1)
一、整数与整除.....	(1)
二、奇数与偶数.....	(6)
三、质数与合数	(12)
四、最大公约数与最小公倍数	(18)
五、代数式 (一)	(25)
六、代数式 (二)	(32)
七、定义新运算	(38)
八、有理数及其运算	(46)
九、科学记数法	(54)
十、抽屉原则	(61)
十一、推理方法	(67)
十二、简单方程	(74)
第二学期	(82)
一、图形与面积	(82)
二、角度计算	(89)
三、绝对值 (一)	(97)
四、绝对值 (二)	(105)
五、方程与不等式.....	(112)
六、应用题 (一)	(119)
七、应用题 (二)	(126)
八、简单染色.....	(132)
九、同余.....	(139)
十、计数原理.....	(146)

十一、棋盘数学.....	(152)
十二、逐步淘汰原则.....	(159)
第一学期练习题解答.....	(167)
第二学期练习题解答.....	(182)

一、整数与整除

第一学期

整数是指 $\cdots, -99, -98, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, 99, 100, \cdots$.

整数的和、差、积仍然是整数,而两个整数的商就不一定了,譬如 2 除以 3. 为此规定:

(1) 设 a, b 是整数, 且 $b \neq 0$, 若有一个整数 q , 使得 $a = bq$ 成立, 则称 b 能整除 a 或 a 能被 b 整除, 记作 $b|a$ (此时 a 为 b 的倍数, b 为 a 的约数).

(2) 设 a, b 是整数, 且 $b \neq 0$, 若有整数 q 和 r , 使得 $a = bq + r$ 成立, 其中 $0 < r < |b|$, 则称 b 不整除 a , 记作 $b \nmid a$ (q 为 a 除以 b 的商, r 为 a 除以 b 的余数).

整除具有如下性质:

(1) 如果 $a|b, a|c$, 那么 $a|(b \pm c)$.

(2) 如果 $a|b, b|c$, 那么 $a|c$.

(3) 如果 $b|a$, 则 $bm|am$, 其中 m 为非零整数.

(4) 如果 $a|b$, 则 $a|nb$, 其中 n 为整数.

(5) 若 $bm|am$, 则 $b|a$, 其中 m 为非零整数.

(6) 若 $a|b_1, a|b_2, \cdots, a|b_n$, 则 $a|(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

例 1 五位数 $4\overline{H97H}$ 能被 12 整除, 它的最末两位数字所成的数 $7\overline{H}$ 能被 6 整除, 求出这个五位数. $4182 \div 12 = 348$

分析与解 由于五位数 $4\overline{H97H}$ 能被 12 整除, 而 $12 = 3 \times 4$, 且 3, 4 互质, 所以 $3|\overline{4H97H}$ 且 $4|\overline{4H97H}$. 由数的整除特征知道 $3|(4 + H + 9 + 7 + H)$, 即 $3|(2H + 20)$. 因 H 只能取 0, 1, 2, 3, 4,

5, 6, 7, 8, 9 之中的某一个, 可分别代入试算, 经试算 H 可取 2、5 或 8, 又因为 $6 \mid \overline{7H}$, 所以 $2 \mid \overline{7H}$, 故 H 是偶数, 因此 H 取 2 或 8, 又因为 $4 \mid \overline{4H97H}$, 所以 $4 \mid \overline{7H}$, 所以 H 取 2. 由此, 这个五位数为 42972.

穷举试算的方法在解决整数问题时是非常有效的.

例 2 有一个 1998 位数 A 被 9 整除, 它的各位数字之和为 a , a 的各位数字之和为 b , b 的各位数字之和为 c , 求 c 等于多少?

分析与解 由于数的各位上的数字都不大于 9,

所以 $a \leq 9 \times 1998 = 17982$,

即 a 至多是一个五位数,

所以 $b < 9 \times 5 = 45$, 即 b 至多是一个两位数,

同理 $c < 9 \times 2 = 18$.

又因为 $9 \mid A$, 所以 $9 \mid a$ (这是因为能被 9 整除的数, 其各位数字之和也必能被 9 整除)

同理 $9 \mid b$ 且 $9 \mid c$, 由 $9 \mid c$ 和 $c < 18$, 所以 $c = 9$.

例 3 求证 $6 \mid n^3 - n$ (n 是整数).

分析与证明 由于 $6 = 2 \times 3$, 且 $(2, 3) = 1$, 所以可以考虑先证明 $2 \mid n^3 - n$, 再证明 $3 \mid n^3 - n$, 从而得出 $6 \mid n^3 - n$.

先把 n 分成 $2k+1, 2k$ 两类 (其中 k 为整数).

当 $n = 2k+1$ 时, $n^3 - n = (2k+1)^3 - (2k+1)$

$$= (2k+1)[(2k+1)^2 - 1]$$

由于奇数 $(2k+1)^2 - 1 = (2k+1+1)(2k+1-1)$

$$= 4k(k+1)$$

由整除定义知: $2 \mid n^3 - n$.

当 $n = 2k$ 时, $n^3 - n = (2k)^3 - (2k)$

$$= 2k(4k^2 - 1)$$

由整除定义知 $2 \mid n^3 - n$.

所以, 对任意整数 n , 有 $2 \mid n^3 - n$ (n 是整数).

再把 n 分成 $3k, 3k+1, 3k+2$ 三类 (其中 k 为整数).

$$\begin{aligned}\text{当 } n=3k \text{ 时, } n^3-n &= (3k)^3-(3k) \\ &= 3k(9k^2-1)\end{aligned}$$

由整除定义知 $3|n^3-n$.

$$\begin{aligned}\text{当 } n=3k+1 \text{ 时, } n^3-n &= (3k+1)^3-(3k+1) \\ &= (3k+1)[(3k+1)^2-1] \\ &= (3k+1) \cdot (3k+2) \cdot 3k\end{aligned}$$

由整除定义知, $3|n^3-n$

$$\begin{aligned}\text{当 } n=3k+2 \text{ 时, } n^3-n &= (3k+2)^3-(3k+2) \\ &= (3k+2)[(3k+2)^2-1] \\ &= (3k+2)(3k+3)(3k+1) \\ &= 3(k+1)(3k+2)(3k+1)\end{aligned}$$

由整除定义知, $3|n^3-n$.

所以, 对任意整数 n 有 $3|n^3-n$.

对于整除问题, 可利用分类讨论的方式解决. 另外注意到:
 $n^3-n=(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$, 可以得到结论: 三个连续整数之积能被 6 整除.

类似地, 很容易证明 $6|n^2(n+1)+n(n+1)^2$.

例 4 求证 53^{53} 和 33^{33} 的末位数字相同.

分析与解 由于 $3^1=3, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81, 3^5=243, \dots$, 可以想到 $3^{4k+1}, 3^{4k+2}, 3^{4k+3}, 3^{4k+4}, (k \text{ 为非负整数})$ 的末位数字分别为

$$3, 9, 7, 1$$

所以 53^{53} 和 33^{33} 的末位数字都是 3. 故它们的末位数字相同.

通过上题可以看出: 讨论整数的末位数字, 发现其中的规律是解决数字方面的整除问题的重要手段. 事实上, 任何一个自然数它的 n 次方总是有规律的. 而且此种由特殊到一般的研究问题的方法, 也是数学中常用的、重要的、行之有效的方法.

另外象此题这样讨论末位数字的方法, 也同样可以解决类似求证 $3^{1029}+7$ 能被 10 整除这样的问题. (注: $\because 3^1=3, 3^2=9, 3^3$

$=27, 3^4=81, 3^5=243\cdots$ 可见 3^{4k+1} 的末位数字必为 3.

$\therefore 1029=4\times 257+1,$

$\therefore 3^{1029}$ 的末位数字为 3,

故 $3^{1029}+7$ 的末位数字是 0.

$\therefore 10|3^{1029}+7$ (其中 k 为非负整数).

例 5 一个自然数与 3 的和是 5 的倍数, 与 3 的差是 6 的倍数, 这样的自然数中最小的数是多少?

分析与解 因为任何等于 5 的倍数的自然数均可写成 $5p$ (p 为自然数), 任何等于 6 的倍数的自然数均可写成 $6q$ (q 为自然数). 所以依据题意, 可考虑到方程组来解决此题.

设所求自然数为 x , 依题意, 得

$$\begin{cases} x+3=5p & \text{①} \\ x-3=6q & \text{②} \end{cases}$$

其中 p, q 均为自然数.

①-②得: $6=5p-6q$

所以 $5p=6(q+1)$

因为 $(5, 6)=1$

所以 $6|p$, 故 $p=6, 12, 18, \cdots, 6k$ (其中 k 为自然数).

所以 $q+1=5k$

因为 $q=5k-1$, 即 $q=4, 9, \cdots$

由题设中最小自然数的要求, 得到

$$p=6, q=4$$

把 $p=6, q=4$ 代入所列方程组, 得

$$\begin{cases} x+3=5\times 6 & \text{③} \\ x-3=6\times 4 & \text{④} \end{cases}$$

③+④, 得: $2x=54$

所以 $x=27$.

答: 这样的自然数中最小的是 27.

在解此题过程中, 为了求出 p 和 q 的质, 我们利用了试验法.

把 $p=6, 12, 18, \dots, q=4, 9, \dots$, 分别代入所列方程组试验, 可知要求最小的自然数 x , 就必须 p 取 6, q 取 4.

另外, 此题中用到了布列方程组的方法. 这也是数学中的基本方法. 它的应用很广泛.

例 6 求证三个连续偶数的平方和被 3 除余数是 2.

分析与解 由于三个连续偶数可以表示为 $2n-2, 2n, 2n+2$ (n 为整数). 所以 $(2n-2)^2 + (2n)^2 + (2n+2)^2 = 4[(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2] = 4(3n^2 + 2) = 12n^2 + 8$. 由于 $3 \mid 12, 8$ 除以 3 余 2. 所以 $12n^2 + 8$ 除以 3 余数为 2. 即三个连续偶数的平方和被 3 除余数是 2.

通过上题可以看出把 $12n^2$ 和 8 分开考虑是好方法, 这就使我们想到, 把题进行适当的分解对解题是有好处的. 此种方法也适于以下问题, 若 $4x-y$ 是 3 的倍数, 则 $4x^2-5xy+y^2$ 是 9 的倍数. $4x^2-5xy+y^2$ 就可分解为 $(4x-y)(x-y)$, 前一个因式 $4x-y$ 由题设已知被 3 整除, 后一因式 $x-y=4x-y+x-y-(4x-y)= (4x-y)-3x$. 因为 $3 \mid 4x-3, 3 \mid 3x$, 所以 $3 \mid (x-y)$, 所以 $9 \mid 4x^2-5xy+y^2$.

练 习 一

1. 试确定最小的正整数 n , 其末位数为 6, 若将末位的 6 移作首位数, 则为原数的 4 倍.

2. 设 a, b, c 是三个互不相等的正整数, 求证: 在 $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ 三个数中, 至少有一个数能被 10 整除.

3. 已知八位数 $\overline{4x28y3}$ 能被 99 整除, 求 x, y .

4. 求证: n 为奇数时, $6^n-3^n-2^n-1$ 能被 60 整除.

5. 一个三位数, 如果把这个数减去 7 就能被 7 整除, 如果把这个数减去 8, 它就能被 8 整除, 如果把这个数减去 9, 它就能被 9 整除, 则这个数是多少?

二、奇数与偶数

同学们已经知道整数由两类数构成,一类是能够被 2 整除的整数 $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ 它们可以表示为 $2k$ 的形式. 再一类是不能被 2 整除的整数 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ 它们可以表示为 $2k \pm 1$ 的形式, 其中 k 为整数.

由奇、偶数的特点可以知道: 同奇偶的两数之和(或差)为偶数; 不同奇偶的两数之和(或差)为奇数; 奇数个奇数之和为奇数; 偶数个奇数之和为偶数. 奇数乘以奇数为奇数, 偶数乘以偶数为偶数; 奇数乘以偶数为偶数.

用奇数、偶数概念能解决些什么问题呢? 请同学们看下面的例题.

例 1 判定方程 $2x^2 = 5y^2 + 7$ 有无整数解. 如有, 请解出来; 如没有, 试证明之.

分析与解 由于 $2x^2 - 5y^2$ 在整数范围内不能分解因式, 所以可以猜想: 此方程 $2x^2 = 5y^2 + 7$ 无整数解.

假设方程有整数解 x_0, y_0 , 则有:

$$2x_0^2 - 5y_0^2 = 7 \quad ①$$

因为 7 为奇数, 所以 $2x_0^2 - 5y_0^2$ 是奇数.

因为 $2x_0^2$ 是偶数, 所以 $5y_0^2$ 是奇数.

而 5 是奇数, 所以 y_0^2 是奇数.

因为平方不改变整数的奇偶性,

所以 y_0 是奇数.

令 $y_0 = 2k + 1$ (k 为整数), 代入①式, 得

$$2x_0^2 - 5(4k^2 + 4k + 1) = 7$$

所以 $2x_0^2 - 20(k^2 + k) = 12$

所以 $x_0^2 - 10k(k + 1) = 6$

所以 $x_0^2 = 10k(k + 1) + 6 \quad ②$

而 $10k(k+1)$ 为偶数,

所以 x_0^2 是偶数,

所以 x_0 是偶数.

再令 $x_0=2n$ (n 为整数), 代入②式, 得,

$(2n)^2=10k(k+1)+6$, 整理, 得

$$2n^2=5k(k+1)+3.$$

因为 $k(k+1)$ 是偶数 (当 k 是奇数时, $k+1$ 是偶数, 所以 $k(k+1)$ 是偶数, 当 k 是偶数时, $k(k+1)$ 也是偶数),

而 3 是奇数,

所以 $5k(k+1)+3$ 是奇数.

又因为 $2n^2$ 是偶数, 这样就出现了奇数等于偶数的矛盾现象.

所以假设方程 $2x^2=5y^2+7$ 有整数解是错的, 故方程 $2x^2=5y^2+7$ 无整数解.

通过此题可以看出奇、偶数的代数式表示 $2k+1, 2n$ 对奇偶分析问题的解决是很有帮助的.

例 2 设 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b$ 均为整数, 如果 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-b^2=0$.

求证: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b$ 不都为奇数.

分析与解 由于问题中是要求证 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b$ 不都是奇数, 则 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-b^2=0$ 不能成立. 所以, 不妨设 $a_1=2k_1+1, a_2=2k_2+1, a_3=2k_3+1, \dots, a_5=2k_5+1, b=2k+1$, 其中 $k_1, k_2, k_3, \dots, k_5, k$ 均为整数. 则有:

$$\begin{aligned} & a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2 \\ &= (2k_1+1)^2+(2k_2+1)^2+(2k_3+1)^2+(2k_4+1)^2+(2k_5+1)^2 \\ &= 4[k_1(k_1+1)+k_2(k_2+1)+\dots+k_5(k_5+1)+5] \\ &= 4[k_1(k_1+1)+k_2(k_2+1)+\dots+k_5(k_5+1)]+8\times 2+4. \end{aligned}$$

又 $\because k_1(k_1+1), k_2(k_2+1), \dots, k_5(k_5+1)$ 都是偶数.

$\therefore 4[k_1(k_1+1)+k_2(k_2+1)+\dots+k_5(k_5+1)]$ 是 8 的倍数.

$\therefore a_1^2+a_2^2+\dots+a_5^2$ 被 8 除余数是 4.

①

$\because b^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, 而 $k(k+1)$ 是偶数,

$\therefore b^2$ 被 8 除余数是 1 ②

由①, ②知 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_5^2 \neq b^2$, 这与题设中的 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_5^2 = b^2$ 矛盾.

所以假设 $a_1, a_2, \cdots, a_5, b$ 都是奇数是错误的.

所以 $a_1, a_2, \cdots, a_5, b$ 不能都为奇数.

通过此题可以看出, 说明两数的不等, 方法有多种, 此题是利用了“两整数被某一整数去除, 如果余数不同, 则两整数不等”的结论, 此结论的特殊情况就是奇、偶两数不会相等.

例 3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 是 $1, 2, \cdots, 9$ 这最初九个自然数的任何一种次序的排列, 求证: $(a_1-1)^2 \cdot (a_2-2)^2 \cdot \cdots \cdot (a_9-9)^2$ 不可能是奇数.

分析与解 由于要证明 $(a_1-1)^2 \cdot (a_2-2)^2 \cdots (a_9-9)^2$ 不是奇数, 故可考虑若 $(a_1-1)^2 \cdot (a_2-2)^2 \cdots (a_9-9)^2$ 是奇数, 会有什么样的矛盾现象产生.

假设 $(a_1-1)^2 \cdot (a_2-2)^2 \cdots (a_9-9)^2$ 是一个奇数, 则九个数 $(a_1-1)^2, (a_2-2)^2, \cdots, (a_9-9)^2$ 应当全部为奇数. 把这九个奇数全部加起来, 由于是奇数个奇数相加, 所以其和也应当为奇数. 即

$(a_1-1)^2 + (a_2-2)^2 + \cdots + (a_9-9)^2 = \text{奇数}$. 但是事实上,

$$\begin{aligned} & (a_1-1)^2 + (a_2-2)^2 + \cdots + (a_9-9)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2) - 2(a_1 + 2a_2 + \cdots + 9a_9) \\ & \quad + (1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) \end{aligned}$$

而 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_9^2$ 是由 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 9^2$ 调动次序之后形成的.

所以:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} & (a_1-1)^2 + (a_2-2)^2 + \cdots + (a_9-9)^2 \\ &= 2(1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) - 2(a_1 + 2a_2 + \cdots + 9a_9) \\ &= 2[(1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) - (a_1 + 2a_2 + \cdots + 9a_9)] \end{aligned}$$

所以 $(a_1-1)^2 + (a_2-2)^2 + \cdots + (a_9-9)^2$ 是偶数. 这与 $(a_1-$

$1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \cdots + (a_9 - 9)^2 = \text{奇数}$ 矛盾. 这说明假设 $(a_1 - 1)^2 \cdot (a_2 - 2)^2 \cdots (a_9 - 9)^2$ 是一个奇数的结论是错误的. 也就是说:

$(a_1 - 1)^2 \cdot (a_2 - 2)^2 \cdots (a_9 - 9)^2$ 是一个偶数.

通过上题可以看出, 利用奇偶分析解决问题是很方便的.

另外, 此题可推广为: 若 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 是 $1, 2, 3, \cdots, 2n+1$, 这 $2n+1$ 个自然数打乱顺序后的一种排列, 则 $(a_1 - 1)^2 \cdot (a_2 - 2)^2 \cdots [a_{2n+1} - (2n+1)]^2$ 是偶数. 此题的特例是: 若 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 是 $1, 2, 3, \cdots, 2n+1$ 这 $2n+1$ 个自然数打乱顺序后的一种排列, 则 $(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1) \cdot \cdots \cdot [a_{2n+1} - (2n+1)]$ 是偶数.

例 4 若 $\overline{aa} = 4k + r$ (其中 k 为自然数, $r \neq 0, 1$), 则 $\overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \cdots$ 都不是平方数.

分析与解 由于 $\overline{aaa} = ax100 + \overline{aa}$, $\overline{aaaa} = \overline{aa} \times 100 + \overline{aa}$, $\cdots$, $\overline{aa \cdots a} = \overline{aa \cdots a} \times 100 + \overline{aa}$, 所以 $\overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \cdots$ 被 4 除所得的余数均与 $\overline{aa}$ 被 4 除的余数相同.

$$\because (2n)^2 = 4n^2 \quad (n \text{ 为整数})$$

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$\therefore$ 任何整数平方后被 4 除余数只能是 0 或 1. 而 $\overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \cdots$ 被 4 除所得的余数即非零也非 1.

所以 $\overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \cdots$ 都不是平方数.

通过此题可以看出, 数的表示方法可以把问题统一化, 简单化.

另外, 此题可推广到各科特殊情况, 如求证: $22, 222, 2222, \cdots$ 中任何一个数都不是平方数.

此题的解决方法实际上只须用到偶数平方后必为 4 的倍数, 而 $22, 222, 2222, \cdots$, 并非 4 的倍数就可解决之.

再如求证 $11, 111, 1111, \cdots$ 中任何一个数都不是平方数.

此题的解决方法实际上只须用到奇数平方后必为被 4 除余 1 的数, 而 $11, 111, 1111, \cdots$ 中任何一个数被 4 除都余 3, 而不余 1. 以此可断定 $11, 111, 1111, \cdots$ 中任何一个数都不是平方数.

所以说上面的例题可用来指导我们解决一些特殊的问题.

例 5 设有四个整数之和为奇数,则它们的 n 次方和不可能为偶数. (n 为自然数);设有四个整数之和为偶数,则它们的 n 次方和不可能为奇数 (n 为自然数).

分析与解 由于四个整数之和为奇数,所以这四个整数之中只能有奇数个奇数,即只能是“三奇一偶”或“一奇三偶”,但因为奇数的任意自然数方仍为奇数,偶数的任意自然数方仍为偶数. (奇数 $\times$ 奇数 = 奇数,偶数 $\times$ 偶数 = 偶数). 所以在“三奇一偶”情况下,四个整数的 n 次方和为奇数,在“一奇三偶”的情况下,四个整数的 n 次方和也必为奇数,因此,若四个整数之和为奇数,则它们的 n 次方和不可能为偶数.

由于四个整数之和为偶数,所以这四个正整数之中只能有偶数个奇数,即只能是“四个偶数”或“二奇二偶”或“四个奇数”,但因为奇数或偶数的 n 次方并不能改变其奇偶性,所以在“四个偶数”、“二奇二偶”、“四个奇数”的情况下,四个整数的 n 次方和也必为偶数. 因此若四个整数之和为偶数,则它们的 n 次方和不可能为奇数.

通过此题可以看出,分类讨论可以使问题简单化.

另外,此题可以隐蔽的形式出现,如:设有四个正整数之和为 9,求证:它们的立方和不可能为 200,事实上 9 为奇数,200 为偶数,此题即为设有四个正整数之和为奇数,求证,它们的立方和不可能为偶数. 所以此题实际上也是例题的特殊情况.

例 6 13 个砝码,每一个砝码的克数都是整数,如果其中任意 12 个都可以分成重量相等的两组,并且每组 6 个砝码,证明这 13 个砝码的克数一定都是奇数或都是偶数.

分析与解 假设这 13 个砝码不都是奇数也不都是偶数. (即 13 个砝码的克数有奇数也有偶数).

设 13 个砝码克数总和为 s ,当 s 是偶数时,从中取出一个奇数克的砝码(当 s 是奇数时,从中取出一个偶数个的砝码)剩下 12 个

砝码的克数总和是奇数. 将不能分成重量相等的两组, 这与题设矛盾.

所以假设错误. 所以这 13 个砝码的克数一定都是奇数或都是偶数.

此题我们通过“构造法”的运用找出奇偶矛盾.

另外, 此题可推广为: 13 个砝码, 每一个重量的克数都是整数, 如果其中任意 12 个都可以分成重量相等的两组, 并且每组 6 个砝码, 证明这 13 个砝码的重量都是相等的. 此题首先应证明 13 个砝码的克数同奇偶, 然后利用反证法, (假设 13 个砝码的重量不等) 找出矛盾, 从而得出证明.

练 习 二

1. 下列各组数中, 只有一组数不满足方程: $85x - 324y = 101$. 请问是哪一组?

(A) $x=5, y=1$ (B) $x=329, y=86$

(C) $x=978, y=256$ (D) $x=1301, y=256$

2. 给定自然数 a, b , 证明: 如果 a, b , 不全是奇数, 那么一定可以找到两个自然数 c 和 d , 使 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

3. 证明: 改变一个自然数各位数码的顺序后得到的数与原数之和不能等于 $\underbrace{99\cdots 9}_{1989\text{个}}$.

4. 在一条环形公路上, 有 n 个车站, 被 n 段公路连结, 车站所在地的海拔高度共有 5 米和 10 米两种, 相邻车站的海拔高度若相同, 则用水平公路相连; 若海拔高度不同, 则用坡路相连. 一旅游者在绕公路环形一圈后发现, 有坡公路与水平公路的段数一样多. 求证: n 是 4 的倍数.

5. 已知多项式 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 的系数都是整数, 且 $bd + cd$ 是奇数, 求证: 这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.