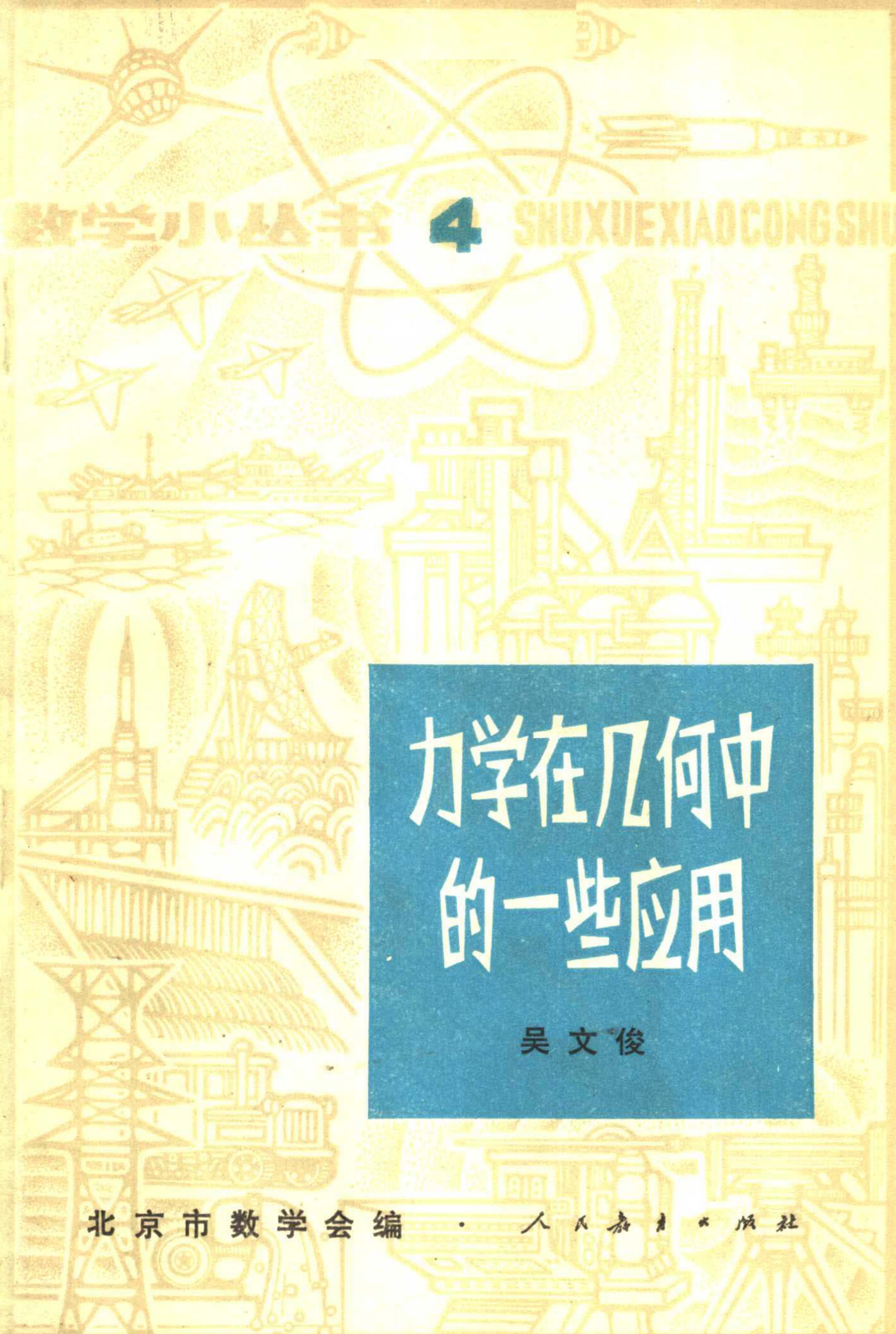


数学小丛书 4 SHUXUEXIAOCONGSHU

力学在几何中的一些应用

吴文俊

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数学小丛书

(4)

力学在几何中的一些应用

吴 文 俊

北京市数学会编

人民教育出版社

数学在力学上的应用是明显的，比如力学上的一些计算就要用到数学。但是力学对于数学、比如在几何中的应用，大家就不一定知道得很多了。其实远在2000年前的阿基米德，就已经应用力学上的物体平衡定律等来证明一些几何命题了。学过物理的中学生，都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念；本书引用了这些力学概念，来举例说明它们如何用来证明一些几何命题。内容只涉及中学课程里的一些物理和几何的知识，不涉及深奥的理论。

力学在几何中的一些应用

吴文俊

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 0.875 字数 18,000

1964年2月第1版 1979年12月第2次印刷

印数 28901——183,900

书号 13012·0251 定价 0.08 元

编 者 的 话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的。近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物。我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求。

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际。

这是我们的初步想法和尝试。热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物。

北京市数学会

1962 年 4 月

作 者 的 话

北京市数学会举办1962年度数学竞赛，在竞赛之前，先对中学生作了几次讲演。这本书就是我所作的一次讲演稿，由李培信、江嘉禾两位同志记录，并由江嘉禾同志执笔整理，谨此志谢。

吴 文 俊

1962年4月

目　　次

前 言

数学、力学以及其他各学科，尽管它们研究的对象形形色色，使用的方法千变万化，它们都是人们为了认识客观世界的规律性并用来改造客观世界而发生、发展和壮大起来的.在这个共同的目的之下，数学和力学更是一对亲密的战友，它们互相支援和推动，彼此启发和帮助.

数学对于力学的作用是显明的.由于数学研究的对象非常普遍，研究的范围也就极其广泛，不论是自然科学、工程技术、国民经济以至于日常生活都不能不和数学打交道；特别是力学，更要用到数学.数学对力学家说来几乎是“不可一日无此君”.

但是反过来，力学对数学的帮助也并不小：从小的方面来说，某些数学定理用力学方法来证明就很简单，某些数学问题从力学着眼来考虑就可能提供一些解决的办法；从大的方面来说，由力学出发，还可能提供新的数学思想、新的数学方法，从而产生新的数学分支.自然，这样的作用并不是力学所独有的.数学是一门基础科学，它是认识和改造客观世界的重要武器之一，尽管经过长期的发展，数学有一套独特的理论系统，个别的数学家在个别的时期表面上和外界脱节，但就数学整体以及整个数学家队伍来说，为生产实践服务不仅是它的

主要目的，也可以说是它的唯一目的。它不能不经常对外来任务提供或摸索解决办法，还通过它不断从外界吸收营养，来壮大自己的力量。这种外来的推动来自各个方面，但从历史的久远和影响的巨大来看，力学的作用特别显著。例如，微积分的产生，力学就起了决定性的作用。在十六世纪英国工业革命的结果，工业的迅速发展和技术革新都要求深入了解物体的运动规律，因而对力学提出了很多急待研究的问题；要解决这些问题，原来的数学工具已经不够用了，迫切需要一个新的数学工具。这就是微积分产生的原因。

力学对数学的应用甚至可以追溯到2000年前。那时是罗马帝国称雄的时代，有一位著名的科学家阿基米德。他对于物体在液体中的浮沉原理的发现是众所周知的，在中学的物理教科书中，就提到它。他在数学上的主要贡献是一些几何图形的面积和体积的计算。这些在今天看来仍然不是轻而易举的，而在当时就更难得了。阿基米德从力学考虑入手提供了新的方法，这些方法用比较近代的观点来看，属于积分的范围。阿基米德的主要著作之一就叫做“一些几何命题的力学证明”。

学过物理的中学生，都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念。本书引用了这些力学概念，举例说明它们如何用来证明一些几何命题。

本书内容只涉及中学课程里的一些物理和几何的知识，不涉及深奥的理论。

一　重心概念的应用

一根棒，如果它的质量均匀分布，它的重心就在棒的中央；如果棒的质量不是均匀的，密度大小各处不同，它的重心就可能偏在某处。但是不管怎样，只要在重心那一点把棒支起，就可以让这根棒达到平衡（图 1）．同样，在一个平板的重心那一点将这平板支起，也能达到平衡（图 2）。在最简单的情形，只有两个质点 M_1 和 M_2，它们的质量分别是 m_1 和 m_2，那么这两个质点的重心 M 就在 M_1 和 M_2 这两点的连线上（图 3），它把线段 M_1M_2 分成下面这个比例：

图 1.

$$d_1 : d_2 = m_2 : m_1.$$

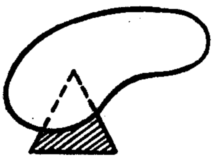


图 2.

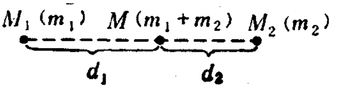


图 3.

三角形有许多有趣的性质是大家熟悉的。例如，三条中线交于一点（重心），三条高交于一点（垂心），三条内分角线交于一点（内心），等等。我们现在从力学出发来证明三条中线交于一点。

设想有一个三角形板，质量均匀分布。那么它的重心应该在什么地方呢？我们把这个三角形板分成许多沿底边平行

的狭条(图 4)。当这些狭条分得很细时，它的重心就在它的中点。所有这些狭条的重心就都在三角形板底边的中线上，因此整个三角形板的重心也就在这条中线上。同样道理，这个三角形板的重心也在另外两条中线上。可见三角形的三条中线相交在一点，即这个三角形的重心。

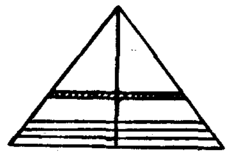


图 4.

我们也可以换一种方法来考虑。设想在三角形的三个顶点处有相同的质量 m (图 5)。我们来看这三个质点的重心应该在什么地方？质点 $B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心在底边 BC 的中点 D 处，质量是 $2m$。质点 $D(2m)$ 和质点 $A(m)$ 的重心，也就是三个质点 $A(m)$、$B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心，应该在 AD 这条中线上，并且这个重心 M 将线段 AD 分成下面的比例：

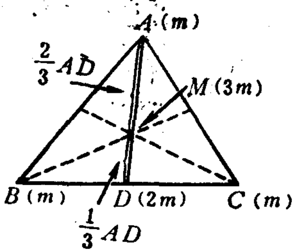


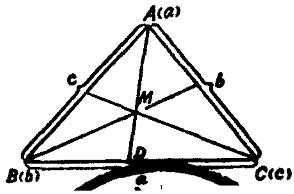
图 5.

$$AM : MD = 2m : m,$$

即 $AM = 2MD$。可见 $AM = \frac{2}{3}AD$，$MD = \frac{1}{3}AD$。同样道理，重心 M 也应该在另外两条中线上。于是三条中线都相交在重心 M 这一点，它和每个顶点的距离等于相应中线长度的$\frac{2}{3}$。

上面是设想三个顶点处有相同的质量的情形。现在我们

来看如果这三个顶点处质量不同，将会发生什么情形？例如，在顶点 A 处的质量等于对边 BC 的长度 a；同样，在另外两个顶点 B、C 处的质量也等于它们对边的长度 b、c（图 6）。质点 B、C 的重心 D 在线段 BC 上，它把线段 BC 分成下面的比例：



$$BD : DC = c : b = AB : AC.$$

可见 AD 是角 A 的平分线（三角形的角平分线把对边分成的两线段和两条邻边成比例）。于是质点 A 和 D 的重心，也就是整个质点系 A、B、C 的重心 M，应该在这条角平分线 AD 上。同样道理，这个重心也应该在另外两条角平分线上。这样，我们就很清楚地看出了三角形的三内角平分线应该交于一点。

如果我们把三顶点处的质量分布再变化一下（图 7，角 A、角 B、角 C 都是锐角），也可以证明三角形的三条高交于一点。

现在我们考虑更一般的情形。设想通过三角形 ABC 的每个顶点处有一条直线（图 8），把对边分成的比例分别是 α、β、γ，即

$$BD : DC = \alpha,$$

$$CE : EA = \beta,$$

$$AF : FB = \gamma.$$

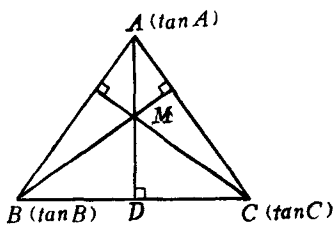


图 7.

假若 AD、BE、CF 这三条直线交于一点，我们来看 α、β、γ 之间有什么样的关系. 设想在顶点 A、B、C 处分别有质量 m_1、m_2 和 m_3，我们总可以选择 m_1、m_2、m_3 使得 F 是质点 A、B的重心，同时 E 是质点 A、C 的重心，即选择m_1、m_2、m_3 使得

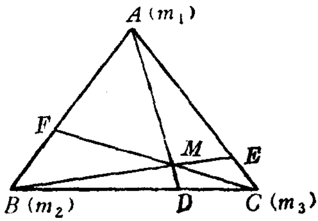


图 8.

$$m_2 : m_1 = \gamma,\quad m_1 : m_3 = \beta.$$

所以，显然整个质点系 A、B、C 的重心 M 应该在 BE 和 CF 的交点处. 既然直线 AD 也通过这个重心，所以 D 一定是质点 B、C 的重心（假若 B、C 的重心不是 D 而是另外一点 D'，那么整个质点系 A、B、C 的重心也就不在 AD 上，而在 AD' 上了），因此也应该有

$$m_3 : m_2 = \alpha.$$

所以，如果 AD、BE、CF 交于一点 M，那么

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=\frac{m_3}{m_2}\cdot\frac{m_1}{m_3}\cdot\frac{m_2}{m_1}=1.$$

反过来，如果 $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$，我们总可以选择适当的 m_1、m_2、m_3，作为 A、B、C 的质量，使得质点 B、C 的重心正好在 D，质点 C、A 的重心正好在 E，而同时质点 A、B 的重心也正好在 F（例如，让 $m_1=1, m_2=\gamma, m_3=\frac{1}{\beta}$）. 因此整个质点系 A、B、C 的重心应该同时在 AD、BE、CF 这三条直线上，可见这时 AD、BE、CF 交于一点. 这样，我们就证明了三角形的西瓦(Ceva)定理：AD、BE、CF 交于一点的充分必要的条件是

$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$。

从上面这些例子看来，应用力学的重心概念不仅可以简化某些几何命题的证明，很自然地得到所要的结论，而且也能够自然而然地发现某些几何事实。我们再举一例来说明如何利用重心概念来发现一个几何图形的性质。

设想在一个四面体(图 9)的四个顶点 A、B、C、D处有相同的质量 m。质点 A、B 的重心在线段 AB 的中点 M_{AB}；质点 C、D的重心在线段 CD 的中点 M_{CD}。所以质点 M_{AB} $(2m)$和质点 M_{CD} $(2m)$的重心，也就是整个质点系 A、B、C、D 的重心 M，应该在线段 $M_{AB}M_{CD}$ 的中点。同样，这个重心 M 也应该在 BC 的中点 M_{BC} 和 AD 的中点 M_{AD} 的连线上，也在 M_{AC} 和 M_{BD} 的连线上。因此，如果把 AB 和 CD 叫做对边，那么，我们就十分自然地看出：四面体的三双对边的中点联线相交在一点，即四面体的重心。

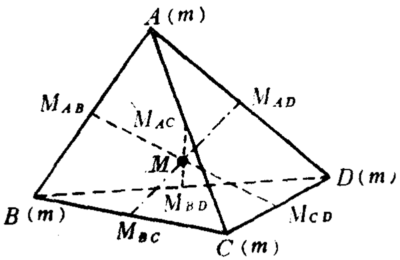


图 9.

我们也可以换一种方法来求这个重心 M。质点 B、C、D 的重心 M_{BCD} 在三角形 BCD的重心处，即三条中线的交点。因此整个质点系 A、B、C、D 的重心 M，就在线段 AM_{BCD} 上，即

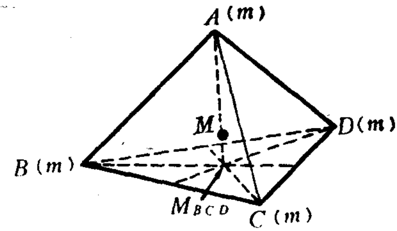


图 10.

质点 A（m）和质点 M_{BCD}（$3m$）的重心所在处。于是线段 AM 的长度等于 AM_{BCD} 的长度的$\frac{3}{4}$。同样，这个重心也在线段 BM_{CDA}、CM_{DAB} 和 DM_{ABC} 上。因此，AM_{BCD}、BM_{CDA}、CM_{DAB}、和 DM_{ABC} 这四个线段又应该相交在 M 这一点．这样，我们很自然地发现了上面所说的几何事实，即四面体 $ABCD$ 共有七条上面所说的特殊线段相交在一点。

对于四面体，我们考虑了在各个顶点处质量分布相同的情形。如果各个顶点处的质量各不相同，我们又可以得到什么样的结论呢？是否可以得到类似于三角形的西瓦定理那样的命题呢？这个问题留给读者自己去解答。

二　力系平衡概念的应用

力，是造成运动改变的原因，通常用一个箭头来表示：箭头的方向表示力的作用方向，箭头的起点表示力的作用点，箭头的长短表示力的大小（图11）．可见，一个力是由三个因素组成，即力的方向、大小和作用点。下面我们把一个力记为 $\vec{a}$ 并把它的大小记为 $|\vec{a}|$。

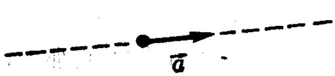


图 11.

我们设想用一条理想的绳来拉一个物体（图 12），只要使用的力一样大，作用的方向一样，那么不论这个力作用在绳上哪一点，它所产生的效果总是一样的。这个性质就

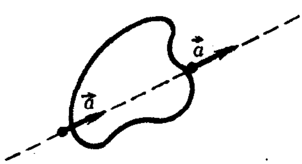


图 12.

是力的传递性．力既然有传递性，所以有时也可以不考虑力的作用点，而只考虑力的方向和大小．

现在设想有一物体受许多力的作用，这些力构成一个力系．这个力系对这物体所产生的总效果究竟怎样呢？我们先考虑两个力，它们作用在一点，总的效果就象物体受单独一个力的作用一样，这个力称为这二力的**合力**，它的方向、大小可用下面这个几何方法求得：在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的作用线相合时，合力是很明显的；假使不相合，那么以力 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线就可代表这合力 $\vec{a}+\vec{b}$ 的大小和方向，也就是力 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的总效应（图 13）．如果这两个力不交于一点，但作用线交于一点，那么可以把这两个力移到这个交点后，再应用上述平行四边形法则来求得它们的合力．如图 13 所示，合力 $\vec{a}+\vec{b}$ 和力 $\vec{a}$ 作成的角是 β，和力 $\vec{b}$ 作成的角是 α，那么

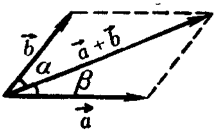


图 13

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

如果一个平面上的二个力 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的作用线平行，它们的方向又相同（图 14），那么合力 $\vec{a}+\vec{b}$ 的作用线和这二力的作用线平行，其间的距离 d_1 和 d_2 有下面的关系：

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

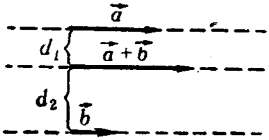


图 14.

合力 $\vec{a}+\vec{b}$ 的方向也就是这二力的方向，合力的大小是这二

力大小的和：

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

假如$\vec{a}$和$\vec{b}$的作用线平行，但方向相反，并且力$\vec{a}$、$\vec{b}$的大小不等(图 15)，那么合力的作用线也和力$\vec{a}$、$\vec{b}$的作用线平行，它跟这两条直线的距离d_1和d_2有下面这个关系：

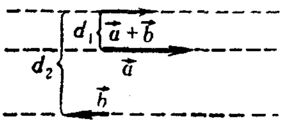


图 15.

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

合力的方向是这二力中较大的一力的方向，合力的大小是这二力大小的差：

$$|\vec{a}+\vec{b}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||.$$

假如力$\vec{a}$和$\vec{b}$的作用线平行，方向相反，并且力$\vec{a}$、$\vec{b}$的大小相等(图16)，那么这二力的总效应是一个旋转，因此不能用一个单纯的力来代替。这时候力$\vec{a}$、$\vec{b}$称为一个**力偶**.

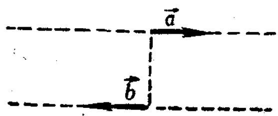


图 16.

因此，对于由许多在同一平面上的力组成的一个平面力系，我们总可以依次一个一个地加起来，最后求得整个力系的总效应，或者能够用一个单纯的力来代替，或者它的总效应是一力偶。

如果一个力系的合力是零，就是它的总效果对所作用的物体并无影响，那么称这力系处在平衡状态。例如在同一条作用线上的二力大小相等方向相反，那么这二力成平衡。三个力中二力的合力和第三力成平衡，那么这三力也平衡。我

们有下面这个简单原理：

原理 I 平面三力成平衡，那么三力线或者平行，或者交于一点(图 17)。

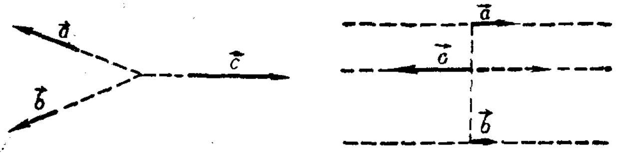


图 17.

可以利用这个原理证明某三条不相平行的直线交于一点，只要能设法找到三个力成平衡。而它们的作用线就是要考虑的那三条直线。下面举些例子来说明这个原理的应用。

设想在三角形 ABC 的底边 BC 上有二力 $\vec{a}$ 和 $\vec{a}'$ 成平衡，在边 AC 上有二力 $\vec{b}$ 和 $\vec{b}'$ 成平衡，在边 AB 上也有二力 $\vec{c}$ 和 $\vec{c}'$ 成平衡(图 18)，因此整个力系处在平衡状态。再设各个力的大小都相等：

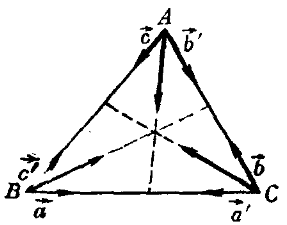


图 18.

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a}'|=|\vec{b}'|=|\vec{c}'|(\neq 0).$$

现在我们换一种方法来计算这力系的合力：如图 18 所示，力 $\vec{b}'$ 和力 $\vec{c}$ 的合力，用这二力所决定的平行四边形的对角线来表示。既然 $|\vec{b}'|=|\vec{c}|$，所以这条对角线也就是顶角 A 的平分线，即 $\vec{b}'+\vec{c}$ 的作用线是 A 角的平分线。同样，$\vec{a}+\vec{c}'$ 的作用线是 B 角的平分线，$\vec{a}'+\vec{b}$ 的作用线是 C 角的平分线。既然整个力系处于平衡状态，所以这三条作用线交于一点(平行