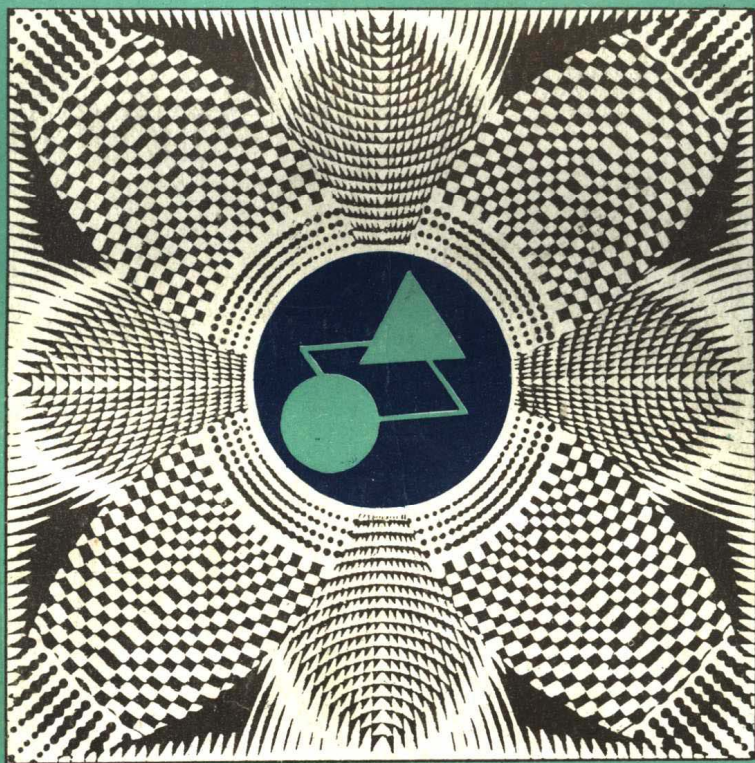


数学教学论

王子兴 主编



广西师范大学出版社

高等师范院校试用教材

数 学 教 学 论

王子兴 主编

广西师范大学出版社

(桂)新登字 04 号

主 编 王子兴
副主编 吴怀恭 杨胜斌
编 著 (按姓氏笔画排列)
王子兴 邱卫平 李汉赢
陈自强 吴怀恭 杨胜斌
章光裕 傅涤余 廖晋成
审 阅 王本午

数学教学论

王子兴 主编

责任编辑 麦瑞钿

封面设计 吕毅林

广西师范大学出版社出版

邮政编码:541001

(广西桂林市中华路 36 号)

广西新华书店发行

湖南省地质测绘印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32

印张:9.875

字数:248 千字

1992年12月第1版

1992年12月第1次印刷

印数:0001- 6500 册

ISBN 7—5633—1390 —7/G · 1120

定价:4.60 元

前 言

《数学教学论》是正在兴起的学科教育学——《数学教育学》的一个分支,随着数学教育科学的发展,它将成为一门相对独立的科学.我们编著本书的目的,就是为了完善这门学科而作的一些探讨.

数学教育学有一种三角形式论观点,即将数学教育学分为数学的课程论、教学论与学习论三部分研究,而本书认为教学应包括教与学的双边活动,且在教学活动中,教与学是难以截然分开的,应将教学论与学习论合二为一,总称为数学教学论.这种观点可以认为是本书的一个特色.

本书的框架分引论、基本理论研究与专题理论研究三大部分,建构这个框架的基本想法是:以科学方法论为指导,以数学为基础,以教与学的理论为主线,渗透和综合逻辑学、心理学、思维科学、美学、教育测量与评价等相邻学科的有关理论,试图做到既有理论价值又有实践指导意义.我们认为数学教学论的研究对象是数学教学,相应地,数学教学原理便成为本书的重要研究内容.我们还特别注意了突出数学学科的特点,为此撰写了“科学的数学与作为教学科目的数学”、“数学方法论与数学教学”、“数学思维与数学教学”等内容.

1987年6月,本书主编在昆明召开的全国高师数学教育研究会学术年会上宣读了论文:“试论数学教学论的背景、对象、任务、内容和方法”(该文刊载在该学会编辑的《数学教育学术通讯》第6期上).这便是本书的最初的总体构想.1990年,全国高师数学教育研究会湖南分会组织八所高师院校编著此书,由湘潭师范学院

的王子兴任主编,岳阳师专的吴怀恭与吉首大学的杨胜斌任副主编.参加编著的还有常德师专的邱卫平、娄底师专的李汉赢、湘潭师范学院的陈自强、湖南师范大学的章光裕、益阳师专的傅涤余、零陵师专的廖普成.

本书编著具体分工如下:第一、二章、第六章 § 3、§ 4—王子兴;第三章—陈自强;第四章—傅涤余;第五章、第六章 § 1、§ 2—李汉赢;第七章—章光裕;第八章、第十章 § 8—邱卫平;第九章—廖普成;第十章 § 1~§ 7—杨胜斌;第十一、十二章—吴怀恭.

1991年初,在湘潭师范学院召开的编著人员会议上,充分讨论、修改了由王子兴撰写的编著提纲.初稿完成后,于1991年8月中旬在吉首大学召开了审稿会.会后,各编者根据审稿会的意见进行了修改、抄正.然后,再由廖普成、杨胜斌、吴怀恭、王子兴四位副教授分工审阅.最后,由王子兴统稿、定稿.

广西师范大学数学系王本午副教授仔细审阅了全部书稿,提出了许多宝贵的修改意见.在本书编著过程中,曾得到湘潭师范学院副院长 吴为平 副教授、副院长唐希中副教授及教务处、数学系的大力支持,还得到了吉首大学有关领导的大力支持,在此谨向他们表示衷心的感谢.

本书还参考了大量的数学教学经验和研究成果(“主要参考文献”附于书后),使我们得以站在众人的肩膀上做了一些有益的尝试,谨向它们的总结者或创造者致谢.

屈原说:“路漫漫其修远兮,吾将上下而求索.”愿我们以此与从事数学教育教学与科研的同行们共勉.由于我们的水平有限,不当和错误之处,恳请读者指正.

编 者

1992年2月

目 录

第一篇 引 论

第一章 数学教学论的背景、对象、任务、 内容和方法	(1)
§ 1.1 从数学教育学谈起	(1)
§ 1.2 数学教学论的研究对象	(5)
§ 1.3 数学教学论的任务	(7)
§ 1.4 数学教学论的内容	(7)
§ 1.5 数学教学论的研究方法	(12)
第二章 科学的数学与作为教学科目的数学	(17)
§ 2.1 科学的数学	(17)
§ 2.2 作为教学科目的数学	(37)

第二篇 基本理论研究

第三章 数学教学的目的与原则	(43)
§ 3.1 中学数学教学的目的	(43)
§ 3.2 中学数学教学日的发展	(49)
§ 3.3 数学教学原则的一般概念	(51)
§ 3.4 数学教学原则	(54)
第四章 数学教学过程	(71)
§ 4.1 数学教学过程的基本要素分析	(71)

§ 4.2	数学教学过程中师生的活动	(73)
§ 4.3	数学教师的智能结构	(89)
第五章	数学教学方法	(98)
§ 5.1	对数学教学方法的理解	(98)
§ 5.2	几种基本的数学教学方式	(101)
§ 5.3	数学教学方法的分类及几种重要的数学教学方法	(108)
§ 5.4	数学教学方法的评价与设计	(115)
第六章	数学教学手段和组织形式	(121)
§ 6.1	运用语言作媒体的教学手段	(121)
§ 6.2	运用教学工具作媒体的教学手段	(125)
§ 6.3	数学教学的基本组织形式	(127)
§ 6.4	数学课的类型和结构	(131)
第七章	数学教育评价	(135)
§ 7.1	数学教育评价的一般理论	(135)
§ 7.2	数学教育评价的目标	(140)
§ 7.3	数学教育评价中的测量	(147)
§ 7.4	学生数学成绩的考核	(154)
§ 7.5	定性分析的数量化	(162)

第三篇 专题理论研究

第八章	科学方法论与数学教学	(168)
§ 8.1	“三论”的产生与发展及基本概念	(168)
§ 8.2	从“三论”中概括的基本原理	(174)
§ 8.3	从“三论”的角度考察数学教学过程	(176)
§ 8.4	“三论”的发展对数学教学论的启示	(185)
§ 8.5	数学方法论与数学教学	(188)
第九章	数学学习中的心理分析	(192)

§ 9.1	指导数学学习的几种理论	(192)
§ 9.2	数学能力结构分析	(205)
§ 9.3	非智力因素与数学学习的关系	(218)
第十章	逻辑与数学教学	(225)
§ 10.1	数学概念	(225)
§ 10.2	数学命题	(232)
§ 10.3	形式逻辑的基本规律	(239)
§ 10.4	数学推理	(241)
§ 10.5	数学证明	(245)
§ 10.6	数学概念的教学	(252)
§ 10.7	定理的教学	(258)
§ 10.8	数学解题的教学	(262)
第十一章	思维与数学教学	(270)
§ 11.1	思维与数学思维概述	(270)
§ 11.2	数学活动中的常规思维	(277)
§ 11.3	数学活动中的非常规思维	(283)
§ 11.4	思维与数学教学	(288)
第十二章	数学美与数学教学	(294)
§ 12.1	数学美及其内容	(294)
§ 12.2	数学美与数学教学	(299)
主要参考文献		(307)

第一篇 引 论

第一章 数学教学论的背景、对象、任务、内容和方法

控制论的主要创立者美国数学家维纳(N Wiener, 1894~1964)在《控制论》一书中说:“在科学发展上可以得到最大收获的领域是各种已经建立起来的部门之间的被忽视的无人区。”^①正是在物理科学与生物科学交叉的“无人区”产生了控制论. 我们期望在数学分别与教学论、心理学、逻辑学、系统论、信息论、控制论、数学方法论、思维科学、美学等学科交叉的“无人区”产生并发展数学教学论.

§1.1 从数学教育学谈起

一、数学教育学产生的背景

1. 当代科技的发展是数学教育学产生的主要背景

随着当代科技出现一种更数学化的趋势,数学进一步进入人们的生活,这就要求人们的数学修养比过去要高得多. 因此,数学教育现在已成为全球共同关心的问题. 同时,令人头晕目眩的“新数学”运动,使世界上许多有识之士认识到了数学教育的重要性及其所面临的困境. 在荷兰数学家汉斯·弗内登特(Hans Freuden-

^① 维纳. 控制论, 科学出版社, 1962.

thal, 1906~)的首倡下,1969年数学家们在法国里昂举行了第一届国际数学教育会议(International Congress on Mathematical Education, 简称 ICME),专门研究数学教育问题. 1972年第二届国际数学教育会议在英国的埃克塞特举行,在这次会议上,正式确定国际数学教育会议每四年一次,与国际数学家大会(International Congress of Mathematician, 简称 ICM)交替举行. 国际数学教育会议地位的确定,无疑极大地提高了数学教育科学的地位,并为数学教育科学的新思想、新方法开辟了广阔的国际交流合作机会.

中国第一次派代表团参加国际数学教育会议,是1980年8月在美国加利福尼亚大学伯克利分校举行的第四届会议. 这次会议的参加者来自90个国家约1800名正式代表,具有广泛的国际性. 中国参加这次会议的有华罗庚、丁石孙、丁尔升、曹锡华、曹飞羽、曾如阜等. 我国已故著名数学家华罗庚(1910~1985)的《普及数学方法的若干经验》是这次会议的四个大会报告之一. 中国数学家、数学教育家参加国际数学教育会议,标志着中国的数学教育开始了与国际间的密切交往.

又随着当代科技出现一种整体综合的趋势,边缘科学相继出现,交叉领域成果累累. 自然科学和社会科学相互渗透,形成一体化. 例如,几乎同时产生于20世纪40年代的系统论、信息论、控制论,就是因为物理科学和生物科学的交叉、渗透、综合发展起来的. 系统论、信息论、控制论作为一种强有力的科学方法论,大大促进了自然科学、社会科学、数学向整体化、综合化发展的趋势.

当代科技上述种种发展趋势,都要求大力加强数学教学. 这就极大地推动了各国有关数学教育科学的研究.

2. 改革现有高师数学教学法教材是数学教育学产生的另一背景

数学教学法作为一门科学,是从19世纪初瑞典教育家别斯塔洛齐(1746~1827)发表于1803年的著作《关于数的直觉理论》开

始的.在我国,1917年北京大学数学系(当时为数学门)就有专门研究数学教授法的学者如胡潜济,40年代商务印书馆还专门出版了中国人自编的数学教学法书籍.(详见参考文献[8])新中国成立后,通过前苏联教育文献的输入而使数学教学法得到系统的发展.

今天,数学教学法作为高等师范院校数学系(科)一门重要的专业课,面对当代科技的飞速发展,特别是面对数学教学改革日新月异的新形势,重新认识这门学科的性质和任务,探讨这门学科的内容和体系,已是势在必行.

正是在上述背景下,一门新兴的边缘科学——数学教育学应运而生.

二、数学教育学体系举要

可以认为,数学教育学是研究数学教育过程客观规律及其应用的科学.

数学教育学这门课程还很年轻,还在形成过程中.我国许多从事数学教育科学教学或研究的专家、学者、教师和教研员,都正在为建立一门具有中国特色的数学教育学而努力奋斗.曹才翰教授在《论数学教育及其研究》^①一文中,对我国数学教育学课程体系提出了一个整体构想,并列举了当前数学教育研究中的二十个问题.这些看法是很有价值的,它反映了目前我国数学教育研究在吸取国外的教育、教学理论和融会国内数学教育研究成果的基础上初步形成的课程体系.但关于数学教育学体系的理论问题,目前国内外学者尚未统一认识,主要有下述几种理论模式.

1. 教学职能论

这是以教学职能为中心研究数学教学的理论模式.这种模式以教学的一般规律为主线,结合数学教材教法建立数学教育学的理论体系,认为只要把数学教学中的一些基本问题,如教学目的、

^① 曹才翰,论数学教育及其研究,数学通报,1987,第9期.

内容、原则、方法、组织形式及数学各种的教材教法问题都搞清楚,数学教育学的基本理论问题就解决了。

2. 数学思维论

这是以学生思维活动为中心研究数学教学规律的理论模式。这种模式认为数学教育学的对象是数学教学,所谓数学教学就是数学思维活动的教学,主张按数学思维规律进行教学,并以此为主线建立数学教育学。

3. 三角形式论

这是以数学课程论、教学论、学习论为主线组建数学教育学体系的理论模式。三角形式论源于美国学者 Tom Kieren 一篇题为《数学教育研究——三角形》的文章,他把西德学者 H Bauersfeld 在第三届国际数学教育会上描述的数学教育的三个研究对象:课程、教学、学习比作三角形的三个顶点,分别对应于三种人:课程设计者、教师、学生。数学教育学有三个研究方面,这就是课程论、教学论、学习论。他用三角形作比喻,形象地揭示了数学教育的主要对象、基本内容以及有关领域间的关系。我国学者曹才翰教授在《论数学教育及其研究》一文中提出了“数学教育学是以数学的课程论、教学论与学习论为主要对象的一门实践性很强的综合性理论学科”的观点。

除上述三种主要的理论模式之外,国内外学者关于该学科体系的论著还有一些。如日本学者横地清教授在《数学教育学序说》一书中提出了数学教育学七个方面的研究领域;国内有的学者提出了数学特点论(数学教育史、内容、特点,内容按集合、关系、映射来安排)等。

我们基本采用三角形式论,但已远非原来的面貌。我们注意到:教学是教与学的双边活动。事实上,我国古代对教学理论的研究,就是把教学当作由“教”与“学”两个方面紧密联系在一起的统一事物去探讨的,即既研究教,又研究学,研究教与学的互相影响

关系.而在西方,最早采用“教学论”这个术语的人,是17世纪的德国教育家拉特克(1571~1635)和捷克教育家夸美纽斯(1592~1670).我们还注意到:过去的数学教学理论的缺陷,正是多从教师的传授意图出发研究如何“教”,很少从学生的认识实践出发研究如何“学”.所以,研究数学学科的学习理论,并以此发展数学学科的教学理论是十分重要的.因此,我们主张把学习论放在教学论里面.这样,数学教育学可划分两个部分:数学课程论,数学教学论.前者主要解决“为什么教”及“教什么”的问题,后者主要解决“怎样教”及“怎样学”的问题.

我们认为:数学教学论是研究数学教学过程中教与学的双边活动及其客观规律的一门科学,是数学教育学的一个分支.随着数学教育科学的发展,它应成为一门相对独立的科学.

§ 1.2 数学教学论的研究对象

任何一门学科如果不揭示这门学科的客观规律,就失去了存在的价值,就不能成为一门科学.数学教学论要成为科学,首先在于要坚持研究数学教学过程中的客观规律.

其实,数学教学论要成为科学,应有自己独特的研究对象.

毛泽东在《矛盾论》中说过,科学研究的区分,就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性.因此,对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究,就构成某一门科学的对象.数学活动中的矛盾是复杂的、多方面的,但最根本的矛盾是数学的教与学的矛盾,也就是说,是教师与学生在双边活动中,数学知识、数学思想、数学方法授受之间的矛盾.因此,可以认为:数学教学论的研究对象是数学教学.这是既不同于数学,又不同于教学论的研究对象.

前苏联学者 A. A. 斯托利亚尔认为:“教学,特别是数学教学是教师借助于一系列的辅助手段(教科书、直观教具、教学技术手

段)来实现的一种复杂控制过程”。(见参考文献[1]P. 9)他关于数学教学的结论是就教学过程中教师教的角度而言的。因而,这种意义下的教学过程就是教师传授数学知识、数学思想和数学方法的过程,即传递信息的过程。但若从数学教学过程中学生学的角度而言,则可以说数学教学是学生利用学校中一切客观条件而进行一系列教学活动来实现的一种吸取信息的控制过程。在这个意义下的教学过程则是学生探索、发现、理解、掌握数学知识、数学思想和数学方法的认识过程。

我们的数学教学论中的数学教学,既是就教学过程中教师教的角度而言的,又是就教学过程中学生学的角度而言的。

数学作为一门科学,是数学知识、数学思想和数学方法的统一体。这种统一体可以表示为一种思维活动(数学活动)——过程,或者表示为这种活动的结果——理论。

“数学活动”不仅用来表示数学家和数学教师的活动,也可用来表示学生在学习过程中的特定的思维活动。这是因为“已知的东西的‘重新发现’,可视为学生的创造性成果。其成果在客观上是非创造性的,但为获得成果而进行的探索过程,却是创造性的,它实际上是创造性思维因素”。^①

对“数学教学”有两种理解:一种是数学理论(即数学知识、数学思想、数学方法)的教学,另一种是数学(思维)活动的教学。这两种不同的理解,反映了传统教育理论与现代教育理论在对知识与能力,结果与过程的认识上各有侧重所致。

我们的数学教学论,正是从数学教学是数学(思维)活动的教学这一点出发的。

从广义上说,数学教学包括了大、中、小学的数学教学。但我们将把它限制在中学数学教学上。因此,我们所论及的数学教学论实

^① 王子兴,在数学教育中培养学生的创造性思维能力,数学通报,1986,第6期。

质上是中学数学教学论。

§ 1.3 数学教学论的任务

数学教学论是一门边缘科学,它与数学、教学论、心理学、逻辑学、系统论、信息论、控制论、数学方法论、思维科学、美学等学科有关。但就其科学性质来说,是既属于教育科学,又属于数学学科的一门交叉学科。

根据数学教学论的科学属性,它应肩负着自然科学教育和人文科学教育的双重任务。具体地说,数学教学论的任务是:

(1)以辩证唯物主义为指导,以社会提出的培养目标为依据,从研究“数学教学”这个对象出发,综合运用与它有关的学科的原理和方法,揭露数学处于一定发展水平时期数学的教与学的客观规律,探讨提高数学教育质量的途径和办法。

(2)面对新技术革命的挑战,为适应世界进入信息社会的发展要求;面向未来,为 21 世纪培养人材,寻求改革中学数学教学的方向和路子。

(3)考虑到作为高师院校数学系(科)的一门基础课程,应该使学生具有从事中学数学教学与研究的初步能力,所以要为他们能胜任中学数学教学与教学研究,担负中学数学教学改革,打下必要的理论基础。

从上述任务可以看出,数学教学论的研究,既要坚持理论的方向,又要突出应用的特点。

§ 1.4 数学教学论的内容

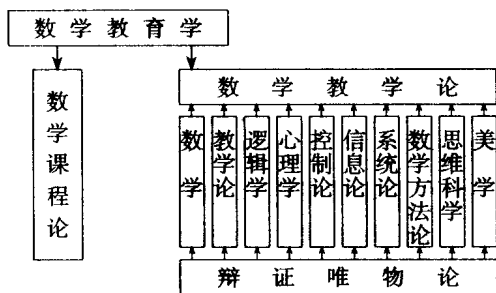
数学教学论的基本内容应对“怎样教数学”和“怎样学数学”这两个问题作出答复。这些答复,一方面应来自数学教学理论的基本

问题研究,即数学教学的目的与原则、数学教学过程、数学教学方法、数学教学手段与组织形式、数学教育评价等;另一方面应主要来自数学分别与教学论、心理学、逻辑学、系统论、信息论、控制论、数学方法论、思维科学、美学等学科交叉的无人区,特别是来自数学与教学论交叉的无人区.而且前者的研究要立足于后者.

一、数学教学论与有关学科的联系

1. 科学方法论的指导作用

数学教学论的一般方法论基础和有关学科的方法论基础一样,是辩证唯物论.下表是数学教学论与其它学科的关系.



在这里我们先简单谈一下系统论、信息论、控制论(以下简称“三论”)作为现代的科学方法论在数学教学论中所显示的指导作用。(第八章将详细论述)

“三论”是当代科学技术发展的产物,将“三论”引进数学教学论,作为中间层次,有助于对数学教学过程的科学探索.

根据“三论”的观点,数学教学过程是一个系统,它包括社会的、心理的、控制的三种成分.这就突破了那种认为教学过程仅仅是特殊的认识过程的狭隘的传统观点.因而可以说:数学教学过程是一个多层次的、多因素的、多功能的动态系统.还可把数学教学过程看成是一个可控的信息交流系统,它体现于学生个体的自控和师生之间的信息传递及反馈控制.这就有可能使数学教学过程的目的达到最佳效果.

此外,还应注意数学方法论在数学教学论中的指导作用.数学方法论是研究和讨论数学的发展规律,数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问.我国数学家徐利治教授认为,研究数学方法论的目的无非是两个:一是进行科学研究,二是指导数学教育的改革.^①

例如,乔治·波利亚(George polya,1887~1985)是当代深孚众望的美籍匈牙利数学大师,他在实变函数、复变函数、概率论、组合数学等若干数学分支领域都做出了开创性的贡献.他又是一位杰出的数学教育家.他提倡用数学方法论的观点改革数学教育,为此他写了《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与合情推理》(中译本名为《数学与猜想》)等被誉为二次世界大战后数学方法论方面的经典著作.他用数学方法论模式指导美国的数学教育改革,影响了一代人.他在提高美国数学水平方面的贡献远远超过了他在数学上的贡献.

2. 从各种流派的教学论派生出数学教学论的基本理论

数学教学论毕竟是教学论的进一步分化,是教学规律在数学教学领域更具体、更精细的阐明.教学论应为数学教学论提供一般的理论依据.但教学论本身正在受到教育改革中出现的新问题和新经验的挑战,又受到迅速发展的新科学的冲击.因此,数学教学论的研究一定要面向实际,要在当前教学论与数学教改实践的结合上寻找课题.例如,“传授知识—培养能力”已成为当前教学论与教改实践相结合的最突出的热点.J. P. 皮亚杰(Piaget)的“发生认识论”,J. S. 布鲁纳(Bruner)的“学科结构论”,Л. B. 赞可夫的“教学与发展”理论,这些理论为数学教学论做出了卓著的贡献.

此外,中学数学教学中还有两个热点方兴未艾:其一,特别强调培养创造能力,培养创造性思维;其二,强调非智力因素的作用,

① 徐利治教授谈数学方法论与数学教育.中学数学教育,1990第5期.