实变函数与泛函分析简明教程

■ 张晓岚 编著

高等教育出版社

实变函数与泛函分析简明教程

张晓岚　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析简明教程/张晓岚编著.—北京:高等教育出版社,2000.6
ISBN 7-04-014368-2

Ⅰ.实…　Ⅱ.张…　Ⅲ.①实变函数-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材　Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 016236 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京印刷一厂

开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2004 年 6 月第 1 版
印　　张	7.625	**印　　次**	2004 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	190 000	**定　　价**	11.80 元

内容提要

本书是“江苏省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果.该书根据高师院校数学专业的实际情况与培养人才的需要,从少而精的基础课、广而约的专业课以及精减课时与课程门数、减轻学生负担和课程内容现代化的教改目标出发,把实变函数与泛函分析整合为一门课程,在一学期内(约 72—80 学时)学完.全书以简明的体系与方法和流畅的语言阐述了实变函数的主要内容和泛函分析的基础知识,突出平台思想及抽象分析简明实用的方法,注意与经典分析的联系,重视应用性与知识现代化.全书内容包括集合论基础、Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分、线性赋范空间与 Hilbert 空间的基本理论和有界线性算子简介.本书的几个附录有助于学生了解现代抽象分析思想方法的产生与发展.本书适合于用作普通高等师范院校数学与应用数学专业本科生及本科函授生教材,也可作为师专数学专业选修课和其它院校相关课程的教材.

序

科学发展日新月异、相互渗透,许多新学科和新技术蓬勃兴起,数学也不例外.大学数学基础教育的课程设置和内容改革与时俱进,不断地深入.现在课程设置增多了,学制仍保持不变,因此为了学生学习和身心全面健康的发展,以现代数学的发展为指导,编写一部由浅入深,简明易学的教科书是极其重要的.

实变函数与泛函分析是现代数学的一个重要基础,应用广泛.这些在许多现行的教科书的序或前言中皆有精僻的阐述,这里不再重复.从数学分析、代数、几何和古典概率等到实变函数与泛函分析,是数学思想、方法和理论的一个飞跃.实变函数创立了一种新的 Lebesgue 测度和积分理论;泛函分析则把一维和高维微积分发展到无限维的情形,它综合并发展了先行各门课程的思想、理论和方法,其概念和方法抽象难懂。而由于实变函数与泛函分析自身的特点与严谨的逻辑和系统性,课程内容环环紧密相扣,使得编写一本能够涵盖实变函数的主要内容与泛函分析的基础知识、内容精炼而又简明易学的教材的任务十分艰巨,任重而道远.

基于以上所述,本书作者经长期的教学和科研实践,逐步形成并编写了这部"实变函数与泛函分析简明教程".这本书以现代数学的发展为指导,精选内容,安排实变函数与泛函分析在一学期完成。内容的安排与阐述,联系经典分析,并在第一、二、三、四和第七章附录中,介绍了相关内容发展简史,循循善导学生领悟从经典概念、理论和方法抽象到更高情形发展的必然和必须.这些对学生的全面发展和对书中内容的理解和掌握以及培养学生抽象思维能力都是十分有助的,无疑是很有特色的一种有益尝试.

编写一部好的教材,需要付出很多时间和精力,不断地完善.可喜的是已有不少作者,根据自己教学的对象,为同一目的,大仁大智、百花齐放,编写了许多好教科书.祝本书的出版,为实变函数与泛函分析的教学做出有益的贡献.

马吉溥

2003年11月于南京大学

前　言

Lebesgue 积分与泛函分析的创立，是 20 世纪数学标志性成就之一．在高等师范院校数学专业的课程体系中，实变函数是使学生接触抽象分析思想方法的一门重要的专业基础课．而在许多师范院校列为选修课的泛函分析，则是学生学习现代数学，特别是现代分析的入门课程．抽象分析的思想、理论和方法，不仅渗透到纯粹数学与应用数学的众多分支，也使人们对于经典微积分的理解和应用达到新的高度．可是由于实变函数概念的抽象和理论的艰深，许多学习过这门课程的学生感到实变函数晦涩难学，不易领会其真谛，于是对于其后继课程泛函分析，也就不愿选修了．这一矛盾随着大学扩招带来的变化和教学改革的深入而日益突出．这对于 21 世纪数学专业的大学生，无疑是一大欠缺．出现上述状况的一个重要原因，是原有的教材基本定形于上个世纪 50 年代及 80 年代初期，反映了当时的时代特点，过于追求理论体系的严密完整，导致内容繁琐冗杂，难度过大，掩盖了抽象分析极具活力的新思想和简洁实用的新方法．为此，我们深感需要对这门课程的设置与内容进行改革．经过深入调查研究和多年实践，结合师范院校的特点，我们把原有教学计划中的实变函数和泛函分析两门课程的内容进行适当筛选重组，根据少而精的原则和教改的需要，删除陈旧与繁琐、重复的内容，降低难度，压缩课时，保留了实变函数的主要内容，精选了泛函分析的基本概念和理论，突出抽象分析的基本思想方法，适当增添一些现代数学知识，整合成一门必修课程，用 72—80 学时在一个学期内教完．这样也为深化教学改革和课程现代化腾出了时间与空间．书中有几个加 * 号的章节：

§3.2，§4.5，§6.4 和 §7.3，可以作为选学内容；还有少数内容及某些定理的证明是用小字排印的，可根据具体情况决定是否讲授.

为了适应师范院校的特点与课程改革的要求，本书在内容选取与编排上，有以下一些特点：

1. 在注重系统性与科学性的同时，突出平台思想，注意与经典分析的联系，这样做一方面降低了难度，提供了适当增添现代性和应用性知识的空间；另一方面帮助学生站在抽象分析的高度重新理解经典分析的某些概念与理论，有利于提高学生的综合能力与素质.

2. 可测集与可积函数的概念是建立 Lebesgue 积分的基础，学生必须深刻理解.但是这两个概念又十分广泛，除去实变函数之外，在自然科学、工程技术乃至大多数数学分支中，几乎不对所研究的集合与函数构成什么限制，也不涉及对可测性的论证.因此对这一内容的安排尽可能用比较简明的语言把概念讲清楚，不讨论可测性的论证技巧，这样减少了难点，节约了时间，且不降低对本门课程的要求.

3. 为让学生尽快地学到泛函分析的基本理论和方法，本书改变一般泛函分析教材用较大篇幅从度量空间开始的做法，而直接从线性赋范空间入门，以 Banach 空间和 Hilbert 空间的基本理论与应用为重点，把度量空间与拓扑空间作为赋范空间的延伸简单介绍，并且介绍了列紧性、不动点定理、正交分解等内容，强调泛函分析的应用性，在不多的篇幅中突出泛函分析的基本理论、方法与应用.

4. 在第一、二、三、四、七各章的附录中，选编了相关内容的发展简史，帮助学生理解抽象分析的发端与形成，了解从经典分析到抽象分析在数学思想方法上的飞跃.这对于未来的数学教师，是十分有益的.

5. 各章的习题，是围绕主要概念与定理设置的基本题，注重对抽象分析理论与方法的应用.例如几乎处处成立的命题和 Lebesgue 可积性的独特证法，体现了抽象分析方法的简洁与活力，有助于提高计算与论证有关测度与积分问题的技巧，就配置了较多的习题.由于

可测性的广泛性,在实变函数之外的许多理论与应用问题中,论证集合与函数的可测性实际意义已经不大,因此基本上没有安排证明可测性的习题.此外,凡加 * 号的习题均属于加 * 号的内容.

1998 年 10 月,由华东师范大学张奠宙教授和北京师范大学严士健教授主持,在徐州师范大学召开了有全国二十余所高师院校参加的《高师院校数学系面向 21 世纪教学改革研讨会》.受到张奠宙教授主题报告的启发,编者在这次会议上提出了改革实变函数与泛函分析课程、编写新教材的设想,并于 1999 年 8 月完成新教材的第一稿,在徐州师范大学开始试用。以后又四度修订,连续在五届数学系本科生及多届函授生中使用,取得了良好的效果.本书作为"江苏省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程改革计划"的研究成果,得到了徐州师范大学教务处和数学系的大力支持和鼓励.徐州师范大学数学系王戈平教授、马意海教授参加了本书编写思想的讨论,他们还和刘笑颖教授、朱江教授一起参加了书稿的修订.淮北煤炭师范学院张从军教授、聊城师范学院孟广武教授、淮阴师范学院戴安顺教授参加了本书初稿的讨论,提出了宝贵意见.上述四所院校还组织安排在全日制本科生和本科函授生中多次使用本书的一至五稿作为教材,积累了丰富的实践材料,对本书的修改和完善提供了巨大支持.南京大学马吉溥教授审阅了本书并在百忙中为本书撰写了序.徐州师范大学孙经先教授作为本书的审稿,仔细审阅了全书并提出了许多十分有益的建议.在此谨对以上各单位与诸位教授,表示诚挚的敬意和感谢.

张晓岚

2003 年 12 月于徐州师范大学

目　　录

今日数学以集合论为基础，每一个数学概念都用集合来描述，并且所有的数学关系都被表示为某种集合之间的链锁式的成员资格关系.

A. M. Gleason

第一章 集　　合

自 19 世纪末叶德国数学家康托(G. Cantor, 1845—1918)对集合论作出奠基性工作以来，集合论已渗透到所有的数学学科，成为现代数学大厦的基石. 现代数学研究的对象，可以概括为集合与映射. 集合论的观点与方法渗透到数学分析，便导致实变函数论的建立. 本章介绍集合论的基本知识，为学习本书后面各章及其它数学课程提供必要的预备知识.

§1.1　集合及其运算

1. 集合与元素

集合，又称为集，是数学中原始概念之一，它不能用其它更简单的概念来定义. 我们通常用描述性的方法引入原始概念，将集合描述为“具有某种性质的对象的全体”. 例如，自然数的全体构成自然数集 $\mathbf{N}$；大于 0 而小于 1 的全体实数构成集合 $(0,1)$；区间 $[a,b]$ 上的全体连续实值函数构成一个集合，记为 $C[a,b]$，等等. 集合中的每个对象称为这个集合的**元素**. 例如 $\mathbf{N}$ 中的每个元素是一个自然数，集合

$(0,1)$中的元素是大于 0 而小于 1 的实数.为简便计,我们也把集合中的元素称做这个集合中的**点**.例如每个在$[a,b]$上连续的函数是$C[a,b]$中的元素,也称为集合 $C[a,b]$中的一个点.

通常用大写字母表示集合,用小写字母表示元素.如果 x 是集合A 的元素,称 x 属于A,记为 $x\in A$.如果 y 不是A 的元素,称 y 不属于A,记为 $y\notin A$.通常用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数集合,$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合,$\mathbf{Z}$ 表示全体整数集合,$\mathbf{C}$ 表示全体复数集合.于是 $\pi\in\mathbf{R}$,但 $\pi\notin\mathbf{Q}$.

应当注意,集合是指具有某种性质的对象的全体,判定一个元素是否属于某集合,只需判定它是否具备该集合中的元素应当具备的共同性质.例如判定一个定义在$[a,b]$上的实值函数 f 是否属于$C[a,b]$,只要看 f 是否在$[a,b]$上连续.至于 f 用什么形式表示,是不是初等函数,是否还具备其它分析性质等,都与 f 是否属于$C[a,b]$无关.

每个集合 S 都应满足下列要求:

(1) S 中包含的元素应具有确定性,即对任何元素 x,或者 $x\in S$,或者 $x\notin S$,二者必居其一且只居其一.

(2) S 中的元素是互异的,相同的对象只能算一个元素.

集合的表示法通常有两种.一种是列举法,即在大括号内将集合的元素列举出来,如

$$X=\{a_1,a_2,\cdots,a_{15}\};$$

$$Y=\{1,3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots\};$$

另一种是特性描述法,或称概括原则,即将集合 S 中的元素 x 所具有的性质P 用命题形式$P(x)$叙述出,即

$$S=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}\qquad\text{或}\qquad S=\{x\mid P(x)\}.$$

例 1 集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$表示不等式 $x^2-2x-3\leqslant 0$ 的解集,即$[-1,3]$.

例 2 全体有理数集合 $\mathbf{Q}$ 可以表示为

$$\mathbf{Q}=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{Z}\text{ 且 }q\neq 0\right\}.$$

例 3 设函数 f 定义在$[a,b]$上,集合

$$A=\{x\,|\,x\in[a,b]\text{ 且 }f(x)>c\}$$

表示$[a,b]$中使函数值 $f(x)$大于实数 c 的那些自变量 x 的集合,这种集合称为**逆像型集合**.如果记 $E=[a,b]$,则集合 A 可简单记为 $E[f>c]$,即

$$E[f>c]=\{x\,|\,x\in E\text{ 且 }f(x)>c\},$$

这种形式的集合在后面的测度理论中会经常遇到.如图 1.1 中,$E[f>c]=(x_1,x_2)\cup(x_3,b]$.类似可定义记号 $E[f<c]$,$E[f\geqslant c]$,$E[f\leqslant c]$等.

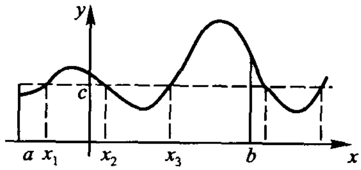

图 1.1

不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$.空集和只含有有限多个元素的集合称为**有限集**.不是有限集的集合称为**无限集**.

集合之间最基本的关系是包含关系.设 A,B 是两个集合,若 A 的每个元素都属于B,称 A 是B 的**子集**,记作 $A\subset B$ 或$B\supset A$,读作 A 包含于B 或B 包含A.显然任何集合 A 都是自己的子集:$A\subset A$.又规定空集$\varnothing$是任何集合的子集.如果 $A\subset B$ 且$B\subset A$,就称 A 与B **相等**,记为 $A=B$,这时 A 与B 所含元素完全相同.如果 $A\subset B$ 且$A\neq B$,就称 A 是B 的**真子集**.

若一个集合包含了某类问题中所讨论的所有集合为其子集,则称其为**全集**或**基本集**.例如全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 包含任何实数集为其

子集，$\mathbf{R}$ 就是我们讨论实数问题时的全集，全集起着论域的作用，也是下面定义余集的基础.

我们有时还会遇到以集合为元素的集合. 例如集合 $S=\{(0,1),(2,3),(4,5)\}$ 是一个有三个元素的有限集，它的每一个元素都是开区间，即为 $\mathbf{R}$ 的子集. 又设 $A=\{a,b,c\}$，以 A 的所有子集为元素，可以构造出一个集合

$$P=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

以集合为元素的集又称为**集族**. 于是上面的集合 S,P 都是集族.

设 A 是非空集合，以 A 的所有子集为元素的集族称为 A 的**幂集**，记为 $P(A)$ 或 2^A，即

$$P(A)=\{S\,|\,S\subset A\}.$$

上面列举的集族 P，就是集合 $A=\{a,b,c\}$ 的幂集.

例 4 证明包含关系具有传递性，即若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

证 $\forall x\in A$，因 $A\subset B$，故 $x\in B$. 又因 $B\subset C$，故又有 $x\in C$，从而 $A\subset C$. □

例 5 设 f 是 $E=[a,b]$ 上的实值函数，$c_1<c_2$，证明：

(1) $E[f<c_1]\subset E[f<c_2]$；

(2) 若 $E[f=c_1]\neq\varnothing$，则 $E[f<c_1]$ 是 $E[f<c_2]$ 的真子集.

证 (1) $\forall x\in E[f<c_1]$，有 $f(x)<c_1$. 因 $c_1<c_2$，故 $f(x)<c_2$. 这表明 $x\in E[f<c_2]$，从而 $E[f<c_1]\subset E[f<c_2]$.

(2) 因 $E[f=c_1]\neq\varnothing$，设 $x_0\in E[f=c_1]$，则 $f(x_0)=c_1<c_2$，这表明 $x_0\in E[f<c_2]$ 但 $x_0\notin E[f<c_1]$，因此 $E[f<c_1]$ 是 $E[f<c_2]$ 的真子集. □

2. 集合的运算

我们恒假定在各种运算中所考虑的一切集合都是某一个基本集 X 的子集.

定义 1　设 A,B 是任意两个集合，

(1) 集合 $\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**)，记为 $A\cup B$. 显然，$A\cup B$ 是由集合 A 与集合 B 的全体元素所组成的集合.

(2) 集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A\cap B$. 易见 $A\cap B$ 就是由 A 与 B 的公共元素所组成的集合.

(3) 集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**)，记为 $A-B$，它是由所有属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合.

(4) 集合 $\{x \mid x\in X$ 且 $x\notin A\}$ 称为 A 的**余集或补集**，记为 A^C 或 CA，它由全集 X 中不属于 A 的元素所组成. 当 $A\subset B$ 时，差集 $B-A$ 称为 A 关于 B 的余集，可记为 C_BA. 由余集的定义易得 $A\cup A^C=X$，$A\cap A^C=\varnothing$，$A-B=A\cap B^C$.

(5) 记 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$，称为 A 与 B 的**对称差**.

两个集合的并与交的概念可推广到一族集合的并与交.

定义 2

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x \mid \exists$ 自然数 $i_0\leqslant n$ 使 $x\in A_{i_0}\}$，

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\{x \mid \exists\, n_0\in\mathbf{N}$ 使 $x\in A_{n_0}\}$；

(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x \mid x\in A_i,\ \forall\, i=1,2,\cdots,n\}$，

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\{x \mid x\in A_n,\ \forall\, n\in\mathbf{N}\}$.

一般地，设 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 是一族集合，这里 I 是指标集，α 在 I 中取值. 集合

$$\{x \mid \exists\, \alpha_0\in I \text{ 使 } x\in A_{\alpha_0}\}$$

称为这一族集合的并集，记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 或 $\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$；集合

$$\{x \mid x\in A_\alpha,\ \forall\, \alpha\in I\}$$

称为这一族集合的交集，记为 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 或 $\bigcap\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$.

例 6　设 $A_i=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x<1+\frac{1}{i}\right\}$, $i=1,2,3,\cdots$,则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\}=\left[0,1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}=[0,1].$$

例 7　设 $B_i=\left\{x\,\middle|\,i\leqslant x\leqslant i+\frac{3}{2}\right\}$, $i=1,2,3,\cdots$,则

$$B_1\cap B_2=\left\{x\,\middle|\,2\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}\right\}=\left[2,\frac{5}{2}\right],$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i=\varnothing,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=\{x\mid 1\leqslant x<+\infty\}=[1,+\infty).$$

集合的运算满足下列运算律:

定理 1　(1) 幂等律:$A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(2) 交换律:$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 交对并的分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\cap C=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap C)$;

(5) 并对交的分配律:$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\cup C=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\cup C)$.

证　证明集合相等,可以直接按照定义证(即证明相互包含),也可应用集合的运算定律.下面我们只证(4)的第 2 式,即 $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\cap C=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap C)$,其余请读者自证.

设 $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\cap C$,则 $x\in C$,且 $\exists\,\alpha_0\in I$ 使 $x\in A_{\alpha_0}$,于是 $x\in A_{\alpha_0}\cap C\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap C)$,从而 $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\cap C\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap C)$.

反之,若 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap C)$,则 $\exists\,\alpha_0\in I$ 使 $x\in A_{\alpha_0}\cap C$,此即 $x\in$