普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学基础教程(一)

一元函数微积分

魏贵民　胡　灿

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学基础教程(一)

一元函数微积分

魏贵民　胡　灿

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学基础教程》的第一分册。介绍一元函数微积分与微分方程的基本知识，内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，定积分与不定积分，定积分的应用以及微分方程。

本书根据新世纪科技人才对数学素质的要求，针对当前一般工科院校的教学实际，尽力把教学改革的精神体现在教材中。教材强调数学知识的应用，把数学建模的思想和方法渗透到教材内容中去；注重教学内容的整体优化，选择合理的教学内容与体系结构；强调微积分中重要的数学思想与数学方法的突出作用；选择适当的教学定位，以适应高等教育从精英教育向大众化教育过渡的需要。

本书条理清晰，体系结构完整，例题、习题丰富，书末附有习题答案，可作为一般高等院校理工科非数学专业的教材和教学参考书，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程(一)，一元函数微积分/魏贵民，胡灿.—北京：高等教育出版社，2004.7
ISBN 7-04-014393-3

Ⅰ.大... Ⅱ.①魏...②胡... Ⅲ.一元函数微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 043712 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 尹文军
版式设计 史新薇 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	涿河印业有限公司		
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2004年7月第1版
印　　张	17.25	印　　次	2004年7月第1次印刷
字　　数	310 000	定　　价	18.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

《大学数学基础教程》编辑委员会

主　编　张志让
副主编　王宝富　魏贵民　谢云苏　李小明
编　委　(以姓氏笔画为序)
刘启宽　杨　韧　纽　海
胡　灿　谢祥俊

前　言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学基础教程》的第一分册。本书介绍一元函数微积分与常微分方程的基本知识，主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，定积分与不定积分，定积分的应用以及微分方程等。全书共四章，各章配有适量的习题，书末附有习题答案；每章的最后一节为应用实例。本书的教学时数约为90学时。

本书根据新世纪科技人才对数学素质的要求，针对当前一般工科院校的教学实际，选择合理的教材内容与体系结构，总结编者数十年来的教学实践与教学改革的经验，吸收国内外教材的长处，对传统高等数学教材作了适当的调整。本书主要特色体现在：

一、强调数学知识的应用，把数学建模的思想和方法渗透到教材内容中去。

本书注重应用实例与应用背景的介绍，以培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。在介绍数学概念和理论时，通过引例，让读者体会到微积分是来源于实践，又能指导实践的一种思维创造。在教材中，我们尽量从不同角度给出实际问题并介绍简单的数学模型，让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象有着密切联系。在习题中我们也适当加大应用问题的比例，每章还利用一节专门介绍“应用实例”，通过这些内容，使读者从建立模型，寻求方法到问题解决的全过程中受到初步的训练。

二、注重教学内容的整体优化，选择合理的教学内容与体系结构

本书的编写吸收了国内外众多优秀教材的长处，结合了编者数十年的教学实践和教学改革的经验，在保证教学内容的完整性与科学性的前提下，本书对传统的高等数学教材的教学内容与体系结构进行了合理调整，使概念之间的内在联系更加清晰，更加紧密，更加自然。例如，在一元函数积分学的处理上，教材改变了传统教材先介绍不定积分后介绍定积分的次序，在利用牛顿－莱布尼茨定理计算定积分时引出了原函数，从而引出了不定积分。如此处理，完全符合微积分的产生、发展的原始过程。

三、强调微积分中重要的数学思想与数学方法的突出作用。

本书在讲解数学内容的同时，力求突出在解决实践问题中有重要应用的数学思想与数学方法，揭示重要的数学概念和方法的本质。例如，在微分中强调局部线性化思想；在泰勒公式中强调逼近思想；在极值问题中强调最优化思想；在导数中强调导数的实质——变化率，并给出了导数在几何、物理、生物、经济等方

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

面的具体含义。

四、选择适当的教学定位。

本书适应高等教育从精英教育向大众化教育过渡的需要，主要针对一般工科院校的教学实际，选择适当的教学内容，精选例题和习题，做到重视数学思想与数学方法、淡化运算技巧。

本书由成都理工大学魏贵民、胡灿、魏友华编写，第一、三章由魏贵民执笔，第二、四章由胡灿执笔，第一、二、三、四章的“应用实例”由魏友华执笔完成。《大学数学基础教程》编辑委员会的全体成员对本书进行了初审并提出了不少宝贵意见。本书由成都信息工程学院计算科学系张志让教授和电子科技大学应用数学学院谢云荪教授主审，他们认真地审阅了全书，并提出了重要的修改意见。在本书的编写过程中，高等教育出版社给予我们充分的指导与鼓励，在此一并致以衷心的感谢。

虽然我们努力使本书成为一本具有改革新意又便于教学的教材，但由于编者水平所限，书中的不足与考虑不周之处肯定很多，错误也在所难免，我们祈望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来。

编　者

2004 年 2 月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章

函数　极限与连续

函数是微积分学研究的对象，它的概念和性质在中学数学中已经做了诸多介绍，这里我们择其要者加以陈述和提高，为微积分的学习做好准备工作. 极限理论是微积分学的基础，它是研究函数性质的重要工具. 本章主要介绍函数、极限与连续的基本概念及其性质.

§1-1　初等函数

一、引例

在社会生活和工程实践出现的一个问题中，往往同时有几个变量一起变化，这些变量的变化一般不是孤立的，而是存在一定的依赖关系，这种依赖关系就是我们要介绍的“函数”关系. 下面我们就两个变量的情形看下面的几个例子：

例 1　考虑单价为 2 元的足球彩票的销售额 y（单位：元）与销量 x（单位：张）之间的依赖关系. 它们之间的关系可用公式 $y=2x$ 来表示.

例 2　厦门港是中国东南沿海重要的港口，表 1-1 给出了厦门港 1992 年至 2000 年集装箱吞吐量，从表中可以看出，近几年厦门港集装箱吞吐量近几年增长很快，通过表 1-1 可以查出 1992—2000 年中任一年的吞吐量.

表 1-1　(单位：TEU(万标箱))

年份	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
吞吐量	10.7	15.5	22.5	30.9	40.0	54.6	67.0	84.9	108.0

例 3　心电图(ECG)是通过心电图仪将每一个心动周期产生的心电流放大后描记成的曲线图. 图 1-1(a)，(b)是两位患者的心电图，一位正常，另一位不正常. 虽然我们可以构造一个心电图表示的心电流和时间之间关系的近似公式，

但一般没有必要这样做，因为这种重复出现的图形正是医生诊断疾病所需要的．从这些重复的图形上看心电流和时间的关系远比从公式上看要方便得多．

(a) 正常　　　　(b) 不正常

图 1－1　两位患者的心电图

从以上三个例子可以看出，用公式、表格或图形都能表示两个变量之间的某种依赖关系，这种依赖关系称为函数关系．

二、函数概念

1．数集

集合是数学中一个原始的概念，读者在中学中已经学习过关于集合的许多内容，如集合、元素、子集、交集、并集、补集等，这里不再重述这些内容．

微积分学常常涉及的元素是数的集合，即数集．常见的数集有

复数集 $\mathbf{C}$；

实数集 $\mathbf{R}$；

有理数集 $\mathbf{Q}$；

整数集 $\mathbf{Z}$；

正整数集 $\mathbf{Z}^{+}$；

自然数集 $\mathbf{N}$．

微积分学特别关注实数集 $\mathbf{R}$ 及其一些特殊的子集．例如：

开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b, x\in\mathbf{R}\}$，

闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$，

左闭右开区间 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b, x\in\mathbf{R}\}$，

左开右闭区间 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$，

其中 a 和 b 是实数，且 $a<b$．以上的 4 类数集都称为有限区间或者区间，a，b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度．而区间

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a, x\in\mathbf{R}\},$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b, x\in\mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$$

等统称为无穷区间.

以后在不必辨明所论区间是否包含其端点,以及是否是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为区间,且常用 I 表示.

实数集与实数轴上的点是一一对应的.因此,实数 x_0 也可以称为数轴上的点 x_0.设正数 δ,开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

点 x_0 称为邻域的中心,δ 称为该邻域的半径(图 1-2).

开区间 $(x_0-\delta, x_0)$,$(x_0, x_0+\delta)$ 分别称为点 x_0 的左邻域和右邻域.而

$$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$$

称为点 x_0 的去心邻域,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

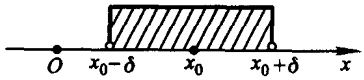

图 1-2

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

2. 映射

定义 1 **设 A,B 是两个非空集合,如果对每个 $x\in A$,按照某种确定的法则 f,在 B 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 A 到 B 的映射,记作**

$$f:A\to B,$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的像,并记作 $f(x)$,即

$$y=f(x);$$

而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原像;集合 A 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=A$;A 中所有元素 x 的像 y 所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f,即

$$R_f=\{y \mid y=f(x), x\in A\}.$$

从上述映射的定义中可以知道,构成一个映射必须具备三个要素:集合 A,即定义域 $D_f=A$;集合 B,即值域的范围 $R_f\subset B$;对应法则 f,使对每个 $x\in A$ 有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,若 $R_f=B$,即 B 中任一元素 y 都是 A 中某元素的像,则称 f 为 A 到 B 上的满射;若对 A 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$,它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为 A 到 B 的单射;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为一一映射(或双射).

设 f 是 A 到 B 的一一映射,则由定义,对每个 $y\in B$,有唯一的 $x\in A$,适合 $f(x)=y$.于是,我们可以定义一个从 B 到 A 的新映射 g,即

$$g:B\to A,$$

对每个 $y\in B$,规定 $g(y)=x$,这 x 满足 $f(x)=y$.这个映射 g 称为 f 的逆映射,记作 f^{-1},其定义域 $D_{f^{-1}}=B$,值域 $R_{f^{-1}}=A$.

3. 函数概念

在我们回顾中学学过的集合与映射后,接下来用映射的有关概念来研究函数.

定义 2 **设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,记为**

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$.

在函数的定义中,对每个 $x\in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$.因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系,通常称为函数关系.函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f,即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

平面直角坐标系中的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

表示函数的主要方法有三种:解析法(公式法)、表格法和图形法.例 1、例 2 及例 3 中就分别用公式法、表格法和图形法各表示了一种函数.

下面举出一些函数的例子,以便加深对函数概念的理解,同时,这些例子在理论或实际问题中也具有典型意义.

例 4 常量函数

$$y=C$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{C\}$.

例 5 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,如图 1－3.

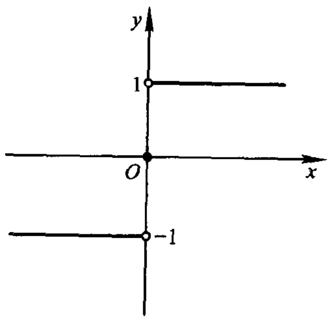

图 1－3

对于任何实数 x,有如下关系式成立

$$x=|x|\cdot\operatorname{sgn}x.$$

例 6 取整函数 $y=[x]$.

取整函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.例如

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[-1]=-1,[-3.5]=-4.$$

函数 $y=[x]$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$,它的图形如图 1-4 所示,这个图形称为阶梯曲线,在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1.

例 7 函数 $f(n)=a_n=1+\frac{(-1)^n}{n} \quad (n\in\mathbf{Z}^+)$.

它的定义域是正整数集,它的图形是平面直角坐标系中一批各自孤立的点(如图 1-5).

定义域是正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 或自然数集 $\mathbf{N}$ 的函数称为整标函数. 如果 $y=f(n)$ 是一整标函数,则 $a_n=f(n)$恰是数列$\{a_n\}$的通项.

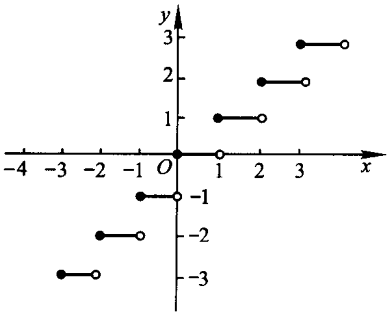

图 1-4

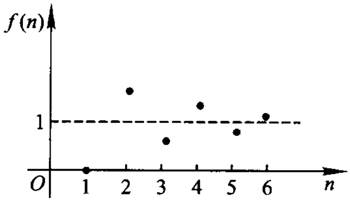

图 1-5

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,如果存在 $a\in\mathbf{R}$,使得对每一个 $x\in I$,都有

$$f(x)\geqslant a,$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上有下界,a 就是它的一个下界;

如果存在 $b\in\mathbf{R}$,使得对每一个 $x\in I$,都有

$$f(x)\leqslant b,$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上有上界,b 就是它的一个上界.

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,如果存在 $M\in\mathbf{R}^+$,使得对每一个 $x\in I$,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内满足

$$-1\leqslant\sin x\leqslant 1,\qquad |\sin x|\leqslant 1,$$

那么函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内既有上界，又有下界，并且也是有界的. -1 就是函数的一个下界，1 就是函数的一个上界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界）.

又如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内有

$$1<\frac{1}{x}<+\infty,$$

因此 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内有下界，但无上界.

容易证明，定义在区间 I 上的函数 $y=f(x)$ 有界的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界.

2．单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加，简称为单增，区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的单调增加区间. 如果当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少，简称为单减，区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的单调减少区间.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数，使函数保持单调性的自变量的变化区间称为单调区间.

3．奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$），如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数；

如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数.

例如，函数 $f(x)=x\sin^2 x$ 是奇函数，$f(x)=\dfrac{\cos x}{|x|}$ 是偶函数，$f(x)=\tan x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

可以证明，奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com