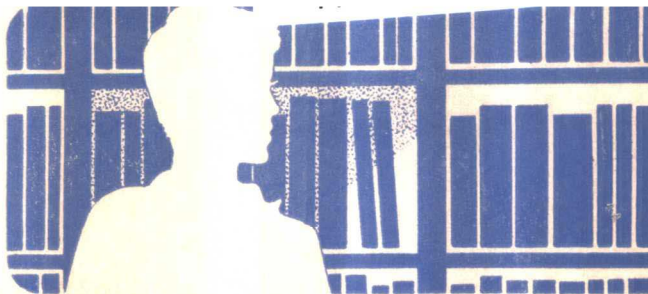


·李 道 中·

4

中学代数题型分析





中学代数题型分析

李道中

河南教育出版社

中学代数题型分析

李道中

责任编辑 刘宗贤

河南教育出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 23.25印张 495千字

1986年7月第1版 1986年7月第1次印刷

印数：1—8,890册

统一书号7356·86 定价3.45元

前 言

本书对中学代数(三角)方面三十七个重要概念、定理、公式及其应用特点,进行了比较系统、条理地归纳整理。

全书基本上按照:概念(或定理、公式),基本应用题型,综合应用例举三部分布局。以剖析基础知识的结构特征为基点,汲取系统科学的思想方法,着意开拓基础知识的纵向应用题型,横向综合应用的内在联系与有机渗透。精选了数百道有助于全面认识基础知识与中学数学各科网状关系的典型例题。并对基础知识应用要点、注意事项等做了概括说明。

书中资料比较丰富,分类比较全面,编辑方法有独到之处。力求使本书成为中学数学教师和广大高中学生深入全面理解教材,进行专题训练,题型教学的必备工具性参考书。

在编写过程中,冯兰君、陈超同志参与了部分编写工作,黄懋德副教授审阅了初稿,后经项昭义同志修改定稿。这些同志给编写本书以热情的帮助,在此特向他们致以诚挚的谢意!

由于水平有限,书中的错误和不妥之处,恳切希望广大读者批评指正。

编 者

1983年10月

目 录

前言

§1 绝对值及其应用	(1)
一 概念	(1)
二 基本应用题型	(2)
(一) 实数绝对值基本应用题型	(2)
(二) 复数绝对值基本应用题型	(10)
三 综合应用例举	(13)
§2 算术根及其应用	(21)
一 概念	(21)
二 基本应用题型	(23)
三 综合应用例举	(31)
§3 “非负数”及其应用	(35)
一 概念	(35)
二 基本应用题型	(36)
三 综合应用例举	(47)
§4 倒数及其应用	(51)
一 概念	(51)
二 应用题型	(51)
(一) 有理数形式倒数概念应用题型	(51)
(二) 根数(式)形式倒数概念应用题型	(55)
(三) 复数形式倒数概念应用题型	(56)

(四)	指数形式倒数概念应用题型	(59)
(五)	对数形式倒数概念应用题型	(61)
(六)	三角比形式倒数概念应用题型	(63)
(七)	其他形式倒数概念应用例举	(65)
§5	复数及其应用	(67)
一	概念	(67)
二	基本应用题型	(68)
(一)	复数概念基本应用题型	(68)
(二)	复数相等概念基本应用题型	(70)
(三)	复数模的概念基本应用题型	(73)
(四)	辐角概念基本应用题型	(73)
(五)	共轭复数概念基本应用题型	(82)
(六)	单位根概念基本应用题型	(88)
(七)	向量概念基本应用题型	(90)
三	综合应用例举	(99)
§6	棣莫佛定理及其应用	(106)
一	定理	(106)
二	基本应用题型	(108)
三	综合应用例举	(113)
§7	排列、组合及其应用	(116)
一	概念	(116)
二	基本应用题型	(117)
(一)	排列数公式基本应用题型	(117)
(二)	组合数公式基本应用题型	(123)

(三) 排列组合定义基本应用题型	(131)
(四) 加法原理、乘法原理基本应用题型	(132)
三 综合应用例举	(139)
§8 概率及其应用	(143)
一 概念	(143)
二 基本应用题型	(144)
三 综合应用例举	(156)
§9 平方差公式及其应用	(167)
一 公式	(167)
二 基本应用题型	(169)
三 综合应用例举	(174)
§10 完全平方公式及其应用	(179)
一 公式	(179)
二 基本应用题型	(182)
(一) 直接变换基本应用题型	(182)
(二) 配平方变换基本应用题型	(183)
(三) 平方变换基本应用题型	(194)
三 综合应用例举	(196)
§11 二项式定理及其应用	(201)
一 定理	(201)
二 基本应用题型	(203)
(一) 通项公式基本应用题型	(203)
(二) 二项展开式基本应用题型	(210)
三 综合应用例举	(219)
§12 立方乘法公式及其应用	(225)
一 公式	(225)

二 基本应用题型	(226)
(一) 两项和(差)的完全立方公式基本应用题型··	(226)
(二) 两项立方和(差)公式基本应用题型	(228)
三 综合应用例举	(230)
§13 三次多项式因式分解基本公式及其应用	(233)
一 公式	(233)
二 基本应用题型	(236)
(一) 基本公式基本应用题型	(236)
(二) 推论公式基本应用题型	(238)
(三) 变形公式基本应用题型	(239)
三 综合应用例举	(242)
§14 因式(数)分解及其应用	(245)
一 概念	(245)
二 应用题型	(246)
(一) 因式分解应用题型	(246)
(二) 因式分解应用题型	(250)
§15 多项式恒等定理及其应用	(263)
一 定理	(263)
二 应用题型	(264)
(一) 定理1应用题型	(264)
(二) 定理2应用题型	(270)
(三) 定理3应用题型	(274)
§16 比例性质定理及其应用	(277)
一 定理	(277)
二 基本应用题型	(278)
三 综合应用例举	(287)

§17 等比定理及其应用	(293)
一 定理	(293)
二 基本应用题型	(296)
三 综合应用例举	(302)
§18 部分分式及其应用	(306)
一 概念	(306)
二 应用题型	(311)
§19 对数恒等式及其应用	(319)
一 公式	(319)
二 基本应用题型	(325)
(一) 对数基本恒等式基本应用题型	(325)
(二) 对数换底公式基本应用题型	(327)
(三) 对数推论公式基本应用题型	(331)
三 综合应用例举	(333)
§20 行列式及其应用	(338)
一 概念	(338)
二 应用题型	(341)
§21 重要不等式定理及其应用	(370)
一 定理	(370)
二 基本应用题型	(375)
三 综合应用例举	(384)
§22 极值定理及其应用	(391)
一 定理	(391)
二 基本应用题型	(396)
(一) 定和求积原理基本应用题型	(396)
(二) 定积求和原理基本应用题型	(399)

三 综合应用例举	(406)
§23 方程解(根)及其应用	(418)
一 概念	(418)
二 应用题型	(419)
(一) 实数解(根)应用题型	(419)
(二) 有理根应用题型	(425)
(三) 整数解应用题型	(427)
(四) 正根应用题型	(432)
(五) 虚根应用题型	(436)
§24 判别式及其应用	(443)
一 概念	(443)
二 应用题型	(446)
(一) 判别式 $\Delta > 0$ 应用题型	(446)
(二) 判别式 $\Delta \geq 0$ 应用题型	(450)
(三) 判别式 $\Delta > 0$ 应用题型	(460)
(四) 判别式 $\Delta \leq 0$ 应用题型	(463)
(五) 判别式 $\Delta < 0$ 应用题型	(465)
(六) 判别式 $\Delta = 0$ 应用题型	(467)
§25 韦达(逆)定理及其应用	(471)
一 定理	(471)
二 基本应用题型	(474)
(一) 韦达定理基本应用题型	(474)
(二) 韦达定理逆定理基本应用题型	(480)
(三) 韦达定理及逆定理联合基本应用题型	(482)
三 综合应用例举	(484)

§26 函数定义域及其应用	(497)
一 概念	(497)
二 应用题型	(498)
(一) 在函数概念研究中的应用题型	(498)
(二) 在函数性质研究中的应用题型	(501)
(三) 在解析式变换中的应用题型	(505)
§27 等差(比)数列基本关系公式及其应用	(514)
一 公式	(514)
二 基本应用题型	(516)
(一) 通项公式基本应用题型	(516)
(二) 中项公式基本应用题型	(520)
(三) 前 n 项和公式基本应用题型	(523)
(四) 其它关系公式基本应用题型	(532)
三 综合应用例举	(536)
§28 恒等式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 及其应用	(545)
一 公式	(545)
二 基本应用题型	(547)
三 综合应用例举	(557)
§29 同角切割平方关系公式及其应用	(563)
一 公式	(563)
二 基本应用题型	(564)
(一) 基本关系公式基本应用题型	(564)
(二) 变形公式基本应用题型	(566)
(三) 关系公式基本应用题型	(569)
三 综合应用例举	(570)
§30 同角切弦商数关系公式及其应用	(575)

一	公式	(575)
二	基本应用题型	(576)
	(一) 基本关系公式基本应用题型	(576)
	(二) 变形公式基本应用题型	(579)
三	综合应用例举	(580)
§31	诱导公式及其应用	(583)
一	公式	(583)
二	基本应用题型	(585)
三	综合应用例举	(591)
§32	加法公式及其应用	(601)
一	公式	(601)
二	基本应用题型	(602)
三	综合应用例举	(609)
§33	倍角公式及其应用	(615)
一	公式	(619)
二	基本应用题型	(621)
	(一) 正弦二倍角公式基本应用题型	(621)
	(二) 余弦二倍角公式基本应用题型	(627)
	(三) 正切二倍角公式基本应用题型	(632)
	(四) 正弦、余弦三倍角公式基本应用题型	(634)
三	综合应用例举	(639)
§34	万能公式及其应用	(648)
一	公式	(648)
二	基本应用题型	(649)
三	综合应用例举	(657)
§35	半角公式及其应用	(664)

一 公式	(664)
二 基本应用题型	(667)
(一) 半角公式基本应用题型	(667)
(二) 降幂公式基本应用题型	(669)
(三) 有理式半角正切公式基本应用题型	(673)
三 综合应用例举	(677)
§36 和积互换公式及其应用	(686)
一 公式	(686)
二 基本应用题型	(688)
(一) 积化和差公式基本应用题型	(688)
(二) 和差化积公式基本应用题型	(692)
(三) 变形公式基本应用题型	(699)
(四) 推论公式基本应用题型	(700)
三 综合应用例举	(703)
§37 反三角函数基本关系公式及其应用	(715)
一 公式	(715)
二 基本应用题型	(719)
三 综合应用例举	(731)

§1 绝对值及其应用

一 概 念

【定义】

1. 实数绝对值定义:

如果实数 $x \geq 0$, 那末 $|x| = x$; 如果 $x < 0$, 那末 $|x| = -x$ (代数定义)。

在数轴上表示一个数的点离开原点的距离叫做这个数的绝对值 (几何定义)。

2. 复数绝对值定义:

在复数平面内, 任意一点 $Z(a, b)$ 对应的向量 $\vec{OZ}$ 的长 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, 称为复数 $Z = a + bi$ 的模, 也称复数 Z 的绝对值。它表示复平面内点 $Z(a, b)$ 到原点的距离。

【说明】

1. 当复数 Z 的虚部 $b = 0$ 时, 复数 $a + bi$ 就变成实数 a , 于是绝对值

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

因此复数绝对值的几何意义与实数范围内绝对值的几何意义是一致的。

2. 在应用实数绝对值概念解题时, 要注意用恒等函数及

乘 -1 的两个函数分别表示原绝对值函数。并且注意结合绝对值的性质：“实数的绝对值一定是一个非负的实数”；“在实数的范围内，最小的绝对值是零”等的应用。

3. 在应用复数绝对值概念解题时，除了要注意 $|Z| \neq \sqrt{a^2 + (bi)^2}$ 之外，重要的是要注意避免犯“停留性”错误，即仍然用实数绝对值概念、性质去解有关复数绝对值问题。如 $|\pm i| = i$ ； $|Z| = 4 \Rightarrow Z = \pm 4$ ； $|Z| < 4 \Rightarrow -4 < Z < 4$ （ Z 为复数）等错误运算。

二 基本应用题型

（一）实数绝对值基本应用题型

类型 I 有关含有绝对值符号的代数式的变换问题

【解说】 题设字母无限制时，此类代数式应严格地按照绝对值定义、性质等进行变换。

例1 x 取何值时，等式 $|(x-a)-(x-b)| = |x-a| - |x-b|$ 成立？（ $0 < a < b$ ）

简解：
$$\begin{cases} x-a \geq 0, \\ x-b \geq 0, \\ |x-a| \geq |x-b|. \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x-a \leq 0, \\ x-b \leq 0, \\ |x-a| \geq |x-b|. \end{cases} \quad \text{解得 } x \geq b.$$

类型 I 有关含有绝对值符号的解析式的解证问题

类型 I (A) 变号法解证

【解说】 如何沟通二次多项式、二次根式、含有绝对值符号的解析式之间的相互转换，这是代数恒等、非恒等变换的一个重要内容。所谓变号法就是借助非负数的性质、不等式的性质等，进行配平方或平方变换，消去解析式含有绝对值符号的一种变换方法。

例2 如果 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, 求证:

$$|am + bn + cp| \leq 1.$$

$$\text{简证: } (a-m)^2 + (b-n)^2 + (c-p)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + m^2 + n^2 + p^2 - 2(am + bn + cp)$$

$$= 2(1 - am - bn - cp) \geq 0$$

$$\therefore am + bn + cp \leq 1 \quad \text{①}$$

$$\text{同样, } (a+m)^2 + (b+n)^2 + (c+p)^2$$

$$= 2(1 + am + bn + cp) \geq 0$$

$$\therefore am + bn + cp \geq -1 \quad \text{②}$$

由①、②得

$$|am + bn + cp| \leq 1.$$

类型 I (B) 变项法解证

【解说】 所谓变项法就是利用不等式的性质增加或减少含有绝对值符号的解析式的一种变换方法，也称之为放缩法。

$$\text{例3 求证: } \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

$$\text{证明: } \because |a| + |b| \geq |a+b|$$

$$\therefore |a| + |b| - |a+b| \geq 0$$

$$\text{又} \because \text{若 } a > b > 0, m \geq 0,$$

$$\text{则 } \frac{b}{a} \leq \frac{b+m}{a+m}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a+b| + (|a| + |b| - |a+b|)}{1+|a+b| + (|a| + |b| - |a+b|)} \\ &= \frac{|a| + |b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

类型 I (C) 定值法解证

【解说】 所谓定值法是根据实数的绝对值是一个非负的实数的性质，确定解析式中参变数值的一种变换方法。

(举例略) (注)

类型 II 有关增添绝对值符号的解析式的解证问题

【解说】 增添解析式含有绝对值符号可以使解析式符号保持非负(或正)，并且可以简化二次多项式、二次根式的变换。

例4 设 a, b, c 为三个不相等的整数，试证不存在整系数多项式 $p(x)$ ，使得 $p(a)=b, p(b)=c, p(c)=a$ 。

证明：假设存在整系数多项式 $p(x)$ ，使得

$$p(a)=b, p(b)=c, p(c)=a, \text{ 则}$$

$$p(a)-p(b)=b-c.$$

而 $(a-b)$ 是 $p(a)-p(b)$ 的因式，则 $(b-c)$ 能被 $(a-b)$ 整除。

$$\therefore |b-c| = m_1 |a-b|. \quad (\text{注})$$

注 举例参见文2《“非负数”及其应用》

注 数的整除研究的对象是自然数范围，且由于 $b-c \geq 0, a-b \geq 0$ 不定，因而增添绝对值符号。