



湖北教育出版社

发现数学

——小学数学规律自我发现百例

旷笑言



发 现 数 学

——小学数学规律自我发现百例

旷 笑 言

湖 北 教 育 出 版 社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目 (CIP) 数据

发现数学：小学数学规律自我发现百例/旷笑言编著.
武汉：湖北教育出版社，1996

ISBN 7-5351-2040-7

I. 发… II. 旷… III. 数学课-小学-教学参考资料
IV. G624.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 24194 号

出 版：湖北教育出版社
发 行

汉口解放大道新育村 33 号
邮编：430022 电话：5830435

经 销：新 华 书 店

印 刷：仙桃市新华印刷厂 (433000·仙桃市仙下河北路 15 号)

开 本：787mm×1092mm 1/32 9.5 印张

版 次：1997 年 7 月第 1 版 1997 年 7 月第 1 次印刷

字 数：199 千字 印数：1—3 000

ISBN7—5351—2024—7/G·1654

定价：8.30 元

如印刷、装订影响阅读，承印厂为你调换

前 言

18 世纪著名物理学家里希廷贝尔格说：“学东西的最好途径是亲自去发现它”。爱因斯坦也说：“发现和理解的快乐，是大自然最美妙的馈赠”。数学是门美妙无比的学科，发现数学中的规律更是一件令人兴奋的事情。

小朋友，你想学好数学，并想亲自去体验一下发现数学规律的乐趣吗？那么请你来研读这本书。

使用说明

亲爱的读者,请你先仔细阅读本书为你提供的每一份数学材料,然后,设法回答并写出材料中所提问题的答案。如果你把握十足,说明你成功了,祝贺你!若你还把握不足,也没关系,后面为你准备了参考答案。不过,你最好不要先去看那些答案,或许,经过你的认真思考还会发现比它更好的结果,那样的话,说明你已经变得更加聪明了。

实际上,从这一百份数学材料中,你可以发现到我们平常解题时常要用到的一些数学规律(包括方法与技巧)。如果你还想牢记它们,那么,你还应该去做一做每个规律后面的应用练习。

本书可供小学中、高年级学生阅读。若能在老师或家长的指导下阅读,那会收到更好的效果。

目 录

第一章 数类

1 趣味平方数探秘	1
2 两个自然数游戏	3
3 三个等距自然数	5
4 分数性质的推论	8
5 探讨组数的规律	12
6 巧用分解质因数	17
7 和与差的整除性	19
8 被二五整除的数	22
9 联想到一千零一	24
10 三质数的公倍数	27
11 同余的解题规律	29
12 孙子或剩余定理	33
13 约数的个数之一	36
14 约数的个数之二	39
15 合数的约数之和	43
16 巧用分解互质数	46
17 简便方法求余数	47
18 巧求最大公约数	50
19 两数之间找分数	52
20 巧比分数的大小	55

21 找分分数的规律	58
22 乘方末位数规律	62
23 循环小数化分数	68
24 分数最大公约数	71
25 分数最小公倍数	75

第二章 运算类

26 规律数求和之一	79
27 巧算奇偶数列和	81
28 规律数求和之二	84
29 和数的变化规律	87
30 差数的变化规律	90
31 乘积的变化规律	92
32 商数的变化规律	95
33 减法的又一性质	97
34 除法的又一性质	100
35 除法有分配律吗	102
36 所有真分数之和	104
37 最简真分数之和	107
38 奇偶真分数之和	109
39 一半又一半之和	112
40 智拆分数巧求和	115
41 巧算小数加分数	117
42 巧用繁分式简算	119
43 归纳出数学模型	121
44 改变运算巧计算	124
45 寻找简便速算法	126

46 循环节该怎样记	129
47 循环小数作加法	131
48 循环小数作乘法	136
49 循环节易位规律	139
50 四则运算复合算	140

第三章 几何类

51 数线段有规律吗	142
52 数四边形的规律	144
53 数正方形的规律	146
54 划分长方形规律	150
55 内外拼出正方形	152
56 哪种情形面积大	155
57 正方形与圆比较	157
58 正方形中最大圆	159
59 圆中最大正方形	161
60 一组图形一串数	162
61 形异积同三角形	165
62 外婆的剪纸技巧	167
63 环宽相等比周长	170
64 动物国里的跑道	172
65 扇形周长怎样求	175
66 圆锥体的表面积	177
67 多边形的内角和	180
68 三比之间的联系	182
69 三比之间的关系	184
70 乘算等式改比例	187

71 平分多边形技巧	191
72 比较旋转圆柱体	193
73 比较旋转圆锥体	195
74 寻找一笔画规律	197
75 剪拼正方形规律	201

第四章 应用题类

76 王大爷的钱包包	204
77 弄清情况巧分析	206
78 平均速度是多少	208
79 相差分率一样吗	210
80 工程的计量单位	213
81 是简单的归一吗	215
82 平均亩产是多少	217
83 行程问题标准式	219
84 两个物体的运动	221
85 连续相遇的问题	224
86 巧用中间比差数	226
87 巧用绳尺测井深	228
88 和差问题加减法	229
89 和倍问题归一法	231
90 差倍问题归一法	233
91 盈亏问题比差法	235
92 鸡兔问题假设法	237
93 还原问题逆推法	239
94 对称问题消去法	240
95 倍比问题更比法	243

96 交叉问题集合法	245
97 年龄问题定差法	248
98 时针问题追及法	250
99 星期问题周期法	252
100 抽屉问题公理法	254
练习题参考答案和提示	257
附录:整数可除性理论的拓广与应用	284

第一章 数类

1 趣味平方数探秘

如果规定

$$1 \times 1 = 1^2,$$

$$2 \times 2 = 2^2,$$

$$3 \times 3 = 3^2,$$

.....

我们就称 $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ 分别是 1 的平方, 2 的平方, 3 的平方,

关于数的平方有许多很有趣的规律. 在这里, 我们一起来研究两组算式, 看都有怎样的规律.

(1) 这是一组有趣的算式:

$$1 = 1^2,$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2,$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2,$$

.....

想一想, 再往下写, 会是怎样的算式? 你还能接着往下写吗?

(2) 下面有一组竖式:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times 111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \end{array}$$

.....

如果把它们改写成横式就是：

$$1^2=1,$$

$$11^2=121,$$

$$111^2=12321,$$

.....

想一想，下一个算式该怎样写呢？像这样的算式还能写几个？

【规律】

$$\triangle 1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2,$$

$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2,$$

.....

一般地,有 $1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n^2$ (其中字母 n 代表任意的自然数).

$\triangle 1111^2=1234321$. 像这样的算式还能继续写上五个:

$$11111^2=123454321,$$

$$111111^2=12345654321,$$

$$1111111^2=1234567654321,$$

$$11111111^2=123456787654321,$$

$$111111111^2=12345678987654321.$$

【练习】

计算下列各题.

$$1. \frac{55555 \times 55555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$$

$$2. \frac{999999999 \times 999999999}{(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \times 2 - 9}$$

$$3. \frac{444444444 \times 888888888}{12345678987654321}$$

2 两个自然数游戏

不必计算,就能说出算式

$$6759 \times 78437843 - 7843 \times 67596759$$

的得数来. 你有这个本领吗?

其实这并不困难,只要你认真研究了下面的这几组算式

的结果就可以了.

请先观察算式的特点,再算出算式的得数.

(1) $1 \times 22 - 2 \times 11$

$$2 \times 33 - 3 \times 22$$

$$3 \times 44 - 4 \times 33$$

.....

(2) $11 \times 2222 - 22 \times 1111$

$$12 \times 3434 - 34 \times 1212$$

$$56 \times 7878 - 78 \times 5656$$

.....

(3) $222 \times 333333 - 333 \times 222222$

$$124 \times 234234 - 234 \times 123123$$

.....

(4) $1234 \times 56785678 - 5678 \times 12341234$

.....

这些算式的答案如何? 它们当中的奥秘是什么?

【规律】

这些算式的答案都是 0.

如果我们用字母 a 和 b 表示两个数位相同的自然数, $\overline{aa}$ 和 $\overline{bb}$ 分别表示是由两自然数连续写上两遍所得的数, 那么这些算式及它们的得数都有下面的规律:

$$a \times \overline{bb} - b \times \overline{aa} = 0.$$

因此, 就有

$$6759 \times 78437843 - 7843 \times 67596759 = 0.$$

【练习】

1. 速算下列各题.

$$(1) (1993 \times 19941994 - 1994 \times 19931993) \div 1995$$

$$(2) 1 \times 22 + 2 \times 33 + 3 \times 44 + \cdots + 98 \times 9999 \\ - 2 \times 11 - 3 \times 22 - 4 \times 33 - \cdots - 99 \times 9898$$

$$(3) 2345 \times 67896789 - 6789 \times 23452345$$

2. 研究下列各题.

$$(1) 25 \times 484848 - 48 \times 252525$$

$$(2) 25 \times 48484848 - 48 \times 25252525$$

3. 下面这道题的得数是多少.

$$28 \times \overbrace{8282 \cdots 82}^{2000 \text{ 个 "82"}} - \overbrace{82 \times 2828 \cdots 28}^{2000 \text{ 个 "28"}}$$

4. 设 $a = 123456789, b = 987654321$, 求算式

$$a \times \overbrace{bb \cdots b}^{100 \text{ 个 } b} - b \times \overbrace{aa \cdots a}^{100 \text{ 个 } a}$$

的得数.

3 三个等距自然数

如果今年是1994年,那么与今年相差1年的年份应该是1993年和1995年;与今年相差2年的年份是1992年和1996年;与今年相差3年的年份是1991年和1997年…….我们就称1993和1995是1994的一组等距数,1是它们的等距;1992和1996也是1994的一组等距数,2是它们的等距;1991和1997也是1994的一组等距数,3是它们的等距…….

关于等距数有许多十分有趣的规律.如,任何一个数的2

倍等于它的一对等距数的和. 像 1994 这个数就有:

$$1994 \times 2 = 1993 + 1995;$$

$$1994 \times 2 = 1992 + 1996;$$

$$1994 \times 2 = 1991 + 1997;$$

.....

现在我们有这样一个猜想:

与一个数等距的两个数的乘积会等于这个数自乘的积 (即这个数的平方) 吗? 就拿上面的 1994 这个数来说, 1994 的平方会等于 1993 和 1995 的乘积吗? 还会等于 1992 和 1996 的乘积或 1991 和 1997 的乘积吗? 如果不相等, 那么会相差多少呢? 相差的数是不是有规律?

请你先考察完下面的例子后再作结论. 为了减少计算上的麻烦, 我们在例子里都选用较小的数.

(1) 等距是 1.

$$2 \times 2 - 1 \times 3 = (\quad)$$

$$3 \times 3 - 2 \times 4 = (\quad)$$

$$4 \times 4 - 3 \times 5 = (\quad)$$

$$5 \times 5 - 4 \times 6 = (\quad)$$

.....

(2) 等距是 2.

$$3 \times 3 - 1 \times 5 = (\quad)$$

$$4 \times 4 - 2 \times 6 = (\quad)$$

$$5 \times 5 - 3 \times 7 = (\quad)$$

$$6 \times 6 - 4 \times 8 = (\quad)$$

.....

(3) 等距是 3.

$$4 \times 4 - 1 \times 7 = (\quad)$$

$$5 \times 5 - 2 \times 8 = (\quad)$$

$$6 \times 6 - 3 \times 9 = (\quad)$$

$$7 \times 7 - 4 \times 10 = (\quad)$$

.....

(4) 假设等距用 a 表示,那么一个数的一对等距数的乘积与这个数自乘的积相差多少呢?请你用含有 a 的式子表示出来.会吗?

【规律】

一个数(用字母 b 表示)的一对等距数(可用 $b+a$ 和 $b-a$ 表示)的乘积与这个数自乘的积不相等.它们相差等距 a 的平方.用式子表示就是

$$b^2 - (b+a) \times (b-a) = a^2.$$

【练习】

请直接写出下列各题的得数.

(1) $1994^2 - 1993 \times 1995$

(2) $1994^2 - 1992 \times 1996$

(3) $1994^2 - 1991 \times 1997$

(4) $1 + (2^2 - 1 \times 3) + (3^2 - 2 \times 4) + (4^2 - 3 \times 5) + \dots + (1994^2 - 1993 \times 1995)$

(5) $(15^2 - 10 \times 20) + (25^2 - 20 \times 30) + (35^2 - 30 \times 40) + \dots + (95^2 - 90 \times 100)$