21 世纪全国高校应用人才培养基础课规划教材

概率论与数理统计

黄清龙　阮宏顺　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高校应用人才培养基础课规划教材

概率论与数理统计

黄清龙　阮宏顺　主　编

吴春青　石澄贤　副主编

北京大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书系统地介绍了概率论与数理统计的基本内容，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样和抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析。面对高等教育大众化趋势，本书侧重于基本概念、基本理论和方法，尽量做到内容叙述详细，语言表达通俗易懂，不刻意追求理论深度和解题技巧；通过具体而有趣的实例表述概率统计的基本概念和思想方法，通过较多的例题阐明用概率统计方法分析和解决问题的思路和步骤，启发学生学习兴趣，培养学生分析问题和解决问题的能力。本书还介绍了 MATLAB 的统计功能与应用。

本书可作为高等学校工科、理科（非数学类）各专业教材或教学参考书，也可供工程技术人员、管理人员和自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/黄清龙，阮宏顺主编. —北京：北京大学出版社，2005.8
(21 世纪全国高校应用人才培养基础课规划教材)

ISBN 7-301-09494-9

I. 概… II. ①黄… ②阮… III. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材
IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 090653 号

书　　名：概率论与数理统计
著作责任者：黄清龙　阮宏顺　主编
责 任 编 辑：魏红梅
标 准 书 号：ISBN 7-301-09494-9/O・0662
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn　http://www.pup6.com
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667
电 子 信 箱：pup_6@163.com
排　版　者：北京东方人华北大彩印中心　　电话：62754190
印　刷　者：北京中科印刷有限公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×980 毫米　16 开本　12 印张　251 千字
2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：18.00 元

前　　言

本书参照原国家教委工科数学课程教学指导委员会审订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》和近年来《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》的基本要求编写。

本书着重介绍概率论的基本概念、基本理论以及常用的数理统计方法。在编写本书时，编者力求做到取材适当，概念清晰，注重联系实际。为使目前工科数学教学内容存在经典过多而现代不足的现状有所改观，并提高学生运用数理统计方法的能力，编者首先是在概念的引入上尽量通过具体实例或学生已有的知识引入概念，逐步培养学生从实际问题归纳和抽象数学问题即数学建模的能力。在例题中，先分析题意，通过分析将具体例题归结为相应的概率统计问题然后再计算。通过这样的训练，使学生了解并逐渐掌握用概率统计的理论和方法解题（进一步地解决实际问题）的思想方法和步骤，以培养学生分析问题、解决问题的能力。同时在保证理论系统性的基础上，尽可能多地举一些联系实际的例子。通过这些解决实际问题的例子，提高学生学习兴趣，激发学生的求知欲望，培养学生的创新和创造性思维能力。

本书第一部分为概率论，包括第 1 章至第 5 章，主要讨论随机事件与概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等内容；第二部分数理统计共 4 章，主要讨论随机样本的抽样和抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。面对高校扩招后高等教育大众化趋势，在编写本书时侧重于基本概念、基本理论和基本方法，尽量做到内容叙述详细，通俗易懂，而不刻意追求解题技巧。本书例题较多，书末还附有习题答案，便于学生自学。

面对计算机应用和数学软件的普及，本书将 MATLAB 引入概率统计教学。MATLAB 是集计算、可视化和编程等功能于一身的最流行的科学和工程计算软件之一。在书末初步介绍了 MATLAB 的统计功能与应用，目的是希望把计算机应用与概率统计教学有机地结合起来，把数学软件与运用概率统计方法解决实际问题结合起来。

本书由黄清龙、阮宏顺、吴春青、石澄贤编写，由黄清龙统稿。限于编者水平，同时编写时间也较仓促，书中难免存在不妥甚至谬误之处，恳请读者批评指正。

本书的出版得到了江苏工业学院教务处、信息科学系领导以及数学专业老师们的关心

和支持，并得到了江苏工业学院教学改革基金的资助，在成书过程中还得到了吴建成教授的许多鼓励和帮助，在此深表谢意。

编　者

2005 年 6 月

目　　录

第一部分　概　率　论

第二部分 数 理 统 计

附　录

第一部分 概 率 论

在自然界和人类社会中，有一类现象是具有确定性的。例如切断电源，电灯一定熄灭；在一个标准大气压下纯净的水加热到100℃必然沸腾；同性电荷必然互相排斥。但是也常常会遇到另一类现象，即在一定条件下有多种可能的结果，但到底出现哪一个结果是带有偶然性的。例如：在桌面上抛掷一枚硬币，其结果可能是正面向上也可能是反面向上；医院中的产妇可能生男孩，也可能生女孩；在一大批同类产品中任意抽取一件，抽到的可能是合格品，也可能是次品。诸如此类现象只有在观察后才能知道它的结果，事先不能预知这种现象的具体结果，这种现象叫做随机现象。

对于随机现象的一次具体观察，事先并不能预知其结果，但在大量重复试验或观察中，它的结果却呈现某种客观规律性。比如就在桌面上抛掷一次硬币而言，出现正面向上或反面向上完全是偶然的。但是在相同条件下多次抛掷同一枚匀称硬币，就会发现“出现正面向上”或“出现反面向上”的次数大约各占总抛掷次数的 1/2 左右。又如就投一次篮球而言，NBA 球星和非职业球员都有可能投进也可能投不进，但是在相同条件下各多次投篮，几乎肯定是 NBA 球星进球的比例高。

概率论就是研究随机现象内部蕴含的数量规律性的一门数学学科，也是现代数学的一个重要分支。它的思想、理论和方法在自然科学、社会科学、工农业生产实践、工程技术、公用事业、经济管理和军事等领域有着广泛的应用。概率论是各类专业技术人员和管理工作者必不可少的专业基础知识。

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机试验与样本空间

为了研究随机现象，就要进行实验或对随机现象进行观察。这种实验或观察的过程称为**随机试验**。概率论里所研究的随机试验具有下面两个特征：

(1) 可以在完全相同的条件下重复进行；

(2) 试验会出现哪些可能的结果在试验前是已知的，但每次试验究竟会出现哪一个结果在试验前是无法准确预知的。

在随机试验中；每一个可能出现的不可再分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**；由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，样本空间通常用 Ω 表示。

例 1　抛掷一枚匀称的硬币，观察正反面向上出现的情况，这就是一个随机试验。试验可能的结果有两个："正面向上"，"反面向上"。这两个结果对应于该随机试验的两个基本事件，即这个试验的样本空间可表示为 $\Omega=\{正,反\}$。

例 2　射击环靶的试验，用 A_i 表示"击中 i 环"，则 $A_i(i=0,1,2,\cdots,10)$ 为这个试验的全体基本事件，样本空间 $\Omega=\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_{10}\}$。

例 3　记录某电话总机在一天内接到呼唤的次数，是一个随机试验。试验结果(接到呼唤的次数)可能值为所有的非负整数(因为难以规定一个呼唤次数的上界)。所以样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$。

例 4　掷一颗骰子，观察出现的点数。用 A_i 表示"出现 i 点"，则 $A_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 为这个试验的全体基本事件。这个随机试验的样本空间 $\Omega=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$。

1.1.2　随机事件

在随机试验中可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，简称**事件**。事件常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。

例如前面例 1 中，"正面向上"在一次试验中是可能发生也可能不发生的，是随机事件，

同样的道理，“反面向上”也是随机事件。

事实上随机试验中的每个基本结果(基本事件)都是随机事件。比如例 4 中“出现 1 点”即 A_1 是可能发生，也可能不发生的(因可能出现其他点数而未必是 1 点)，故基本事件 A_1 是随机事件。

但随机事件也可以是由多个基本事件(或多个样本点)组合而成的，这种随机事件叫**复合事件**。比如在例 4 的随机试验中，“出现点数大于 4”(记成 B)和“出现的点数为奇数”(记成 C)也是可能发生也可能不发生的事件，所以 B，C 都是随机事件。但事件 B 由“出现 5 点”(即 A_5)和“出现 6 点”(即 A_6)两个基本事件构成，即 $B=\{A_5, A_6\}$，故事件 B 为复合事件。同样的道理，$C=\{A_1, A_3, A_5\}$，所以事件 C 也是复合事件。

作为极端情况，把每次试验中都必然出现的事件称为**必然事件**；把每次试验中都不可能发生的事件称为**不可能事件**。例如掷一颗骰子，“出现点数大于 7”和“出现点数既是奇数又是偶数”都是不可能事件，“出现点数小于 8”则是必然事件。

通常随机事件可为一个基本事件或复合事件(由多个基本事件组合而成)，即随机事件对应于一个样本点或多个样本点，因此任一随机事件都可以看成是样本空间 Ω 的一个子集，而且该随机事件发生，当且仅当这个随机事件对应的子集中包含的某个基本事件发生。

特别的，必然事件对应样本空间 Ω，不可能事件对应空集 Φ (当然 Φ 和 Ω 也是 Ω 的子集)。本书中用 Ω 表示必然事件，用 Φ 表示不可能事件。

1.1.3 事件间的关系和运算

弄清事件之间的关系和运算对于推导公式、计算概率都有很大的方便。

1. 事件的包含与相等

定义 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。这种关系如图 1.1 所示。

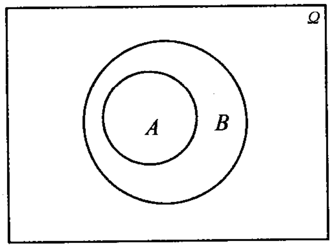

图 1.1

例如在验收机械零件时，设 A 表示“尺寸不合格”，B 表示“零件不合格”，则 $A\subset B$。

定义　若事件 B 包含事件 A，同时事件 A 又包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$。

2. 事件的和

定义　“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”也是一个随机事件，称之为事件 A 与事件 B 的**和**(或**和事件**)，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$。

A 与 B 的和如图 1.2 中的阴影部分所示。

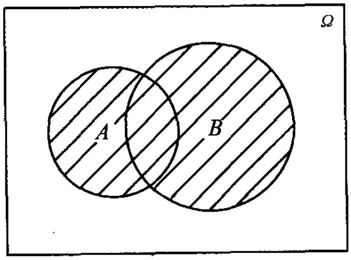

图 1.2

例如在验收机械零件时，规定只要尺寸和粗糙度有一不合格则零件就不合格，则“零件不合格”(用 C 表示)就是“尺寸不合格”(用 A 表示)与“粗糙度不合格”(用 B 表示)的和，即 $C=A+B$。

一般地，称“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

3. 事件的积

定义　“事件 A 与事件 B 同时发生”也是一个随机事件，称为事件 A 与事件 B 的**积**(或**积事件**)，记作 AB 或 $A\cap B$。A 与 B 的积如图 1.3 中的阴影部分所示。

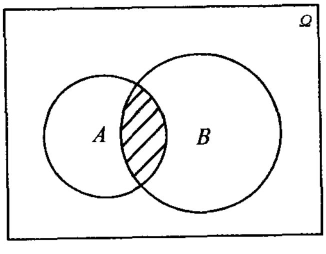

图 1.3

例如在验收机械零件时，规定其尺寸和粗糙度都合格才算合格品，则 “零件合格”(用 C 表示)就是“尺寸合格”(用 A 表示)与“粗糙度合格”(用 B 表示)的积。即 $C=AB$。

类似地，“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”这个事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。

4. 互不相容事件与对立事件

定义 如果两个事件 A 与 B 不能同时发生，即“A 与 B 同时发生”是不可能事件：$AB=\Phi$，则称事件 A 与 B **互不相容(或互斥)**。

这时事件 A 与事件 B 对应的集合没有公共元素(样本点)，如图 1.4 所示。

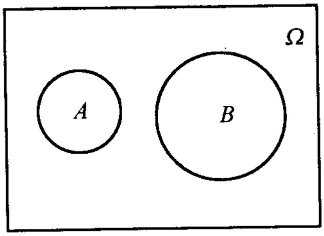

图 1.4

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任两事件互不相容，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互斥(或两两互不相容)。

定义 如果事件 A 与事件 B 必有一个发生且仅有一个发生，即 $A+B=\Omega$，$AB=\Phi$，则称事件 A 与 B 互为**对立事件**。记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$，读作 A 为 B 的对立事件或 B 为 A 的对立事件。A 的对立事件 $\overline{A}$ 如图 1.5 所示的阴影部分所示。

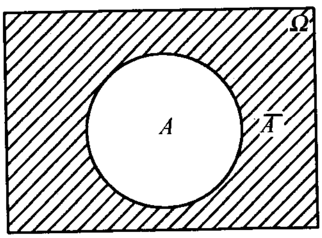

图 1.5

例如掷一颗骰子，设 A 表示“出现偶数点”，B 表示“出现 3 点”，C 表示“出现奇数点”，则 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，而且 A 与 C 互为对立事件。但 B 与 C 是相容的。

5. 事件的差

定义 “事件 A 发生而事件 B 不发生”称为事件 A 与事件 B 的**差**，记作 $A-B$。事件 A 与 B 的差如图 1.6 中的阴影部分所示。

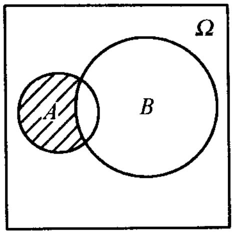

图 1.6

例如掷一颗骰子，设 A 表示“出现偶数点”，B 表示“出现的点数超过 3”，则 $A-B$ 表示出现的点数为偶数但又不超过 3，即“出现 2 点”。

随机事件可以看成是样本空间 Ω 的子集，事件之间的关系和运算与集合论中集合之间的关系和运算也是完全一致的，因而事件之间的关系和运算具有下列性质。

(1) 交换律　$A+B=B+A$；$AB=BA$。

(2) 结合律　$A+(B+C)=(A+B)+C$；$A(BC)=(AB)C$。

(3) 分配律　$A(B+C)=AB+AC$；$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$。

(4) 摩根法则　$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$。

此外还有 $A+B\supset A$，$A+B\supset B$，$AB\subset A$，$AB\subset B$

$$A\Omega=A,\quad \Phi A=\Phi,\quad \overline{\overline{A}}=A,\quad A-B=A\overline{B}。$$

若 $A\subset B$，则 $A+B=B$，$AB=A$。

对于 n 个事件 $A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 有

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}$$

例 5 向指定的目标射击两枪，以 A_1,A_2 分别表示第一枪击中目标、第二枪击中目标，试用 A_1,A_2 及它们的逆事件表示以下各事件。

(1) 两枪都击中目标；

(2) 两枪都没有击中目标；

(3) 恰有一枪击中目标；

(4) 至少有一枪击中目标。

解 (1)只有 A_1，A_2 同时出现时，事件(1)才出现，故“两枪都击中目标”$=A_1A_2$。

(2)由题设知，$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$ 分别表示第一没击中目标、第二枪没击中目标，故“两枪都

没击中目标”$=\overline{A}_1\ \overline{A}_2$。

(3) 相当于事件“第一枪击中目标而第二枪没击中目标”或“第一枪没击中目标而第二枪击中目标”，故“恰有一枪击中目标”$=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$。

(4) “至少有一枪击中目标”$=A_1+A_2$。

例 6 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品 $(i=1,2,3)$。试用事件的运算表示下列事件；

(1) 三次都取到了合格品；

(2) 三次中至少有一次取到合格品；

(3) 三次中恰有两次取到合格品；

(4) 三次中最多有一次取到合格品。

解 (1)“三次取到合格品”$=A_1A_2A_3$；

(2)“三次中至少有一次取到合格品”$=A_1+A_2+A_3$；

(3)“三次中恰有两次取到合格品”$=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$；

(4)“三次中最多有一次取到合格品”$=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$。

1.2 事件的概率

研究随机试验，不仅需要分析它在一定条件下可能产生的各种结果，而且还要分析各种结果发生的可能性大小。刻画随机事件发生可能性大小的量，则是本节要研究的概率的概念。此外本节还涉及概率的性质和简单的计算。

1.2.1 概率的统计定义及性质

1. 事件的频率

设事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称比值 $\dfrac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$。

显然，任何随机事件的频率都是介于 0 与 1 之间的一个数，即 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，且 $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\Phi)=0$。

当事件 A 与 B 不相容时，$f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$