中学数学奥林匹克丛书

立体几何向量及其变换

ZHONG XUESHUXUE AOLINPIKECONGSHU

主编：[illegible]
副主编：[illegible]

北京师范学院出版社

中学数学奥林匹克丛书

立体几何 向量及其变换

主编 梅向明 副主编 张君达
作者 何裕新 孙维刚

北京师范学院出版社
1988年·北京

中学数学奥林匹克丛书
立体几何 向量及其变换
主编：梅向明　　副主编：张君达
作者：何裕新　　孙维刚
*
北京师范学院出版社出版
（北京阜成门外花园村）
新华书店首都发行所发行
国防科工委印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：7.875　字数：171千
1988年7月北京第1版　1988年7月北京第1次印刷
印数：00,001—13000 册
ISBN 7-81014-178-3/G·168
定价　2.15元

前　　言

在悠久的数学史册之中，记载着人们由于企图解一些数学难题而使基础理论得到突破性发展的光辉业绩。无论是无理数的引入，非欧几何的诞生，还是群论的发展等，都毋庸置疑地证明了这一点。反过来，基础理论的发展又为数学家们提出了诱人涉猎的难题。

奥林匹克运动起源于古希腊（公元前776年），这是力量、灵活与美的竞赛。“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年，罗马尼亚向东欧七国提议举办第一届“国际数学竞赛”，简称IMO（International Mathematical Olympiad），以后每一年举行一次，参加的国家逐渐增多。这便是沿袭至今的“国际中学生数学奥林匹克”。

1956年在我国北京，上海等地开始举办省、市一级的高中数学竞赛，1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛，以后每年举行一次。同时，我国中学生还参加了其他国家举办的一些中学生数学竞赛的通讯比赛。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展中、小学的数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展，提高我国青少年数学素质的一个积极因素。

面临高难度的国际中学生数学竞赛，为使我国中学生在IMO中能跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨IMO选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

1985年4月北京数学会创办了北京数学奥林匹克学校。三年来，在全体教师和工作人员的努力下，在教育部门与家长的大力支持下，北京数学奥林匹克学校为提高青少年的数学素质，培养数学优秀人才作出了一定的贡献。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，高、初中全国数学联赛以及IMO中取得了一定的成绩。

然而，这仅仅是开始！当我们踏上攀登数学奥林匹克高峰的征途时，我国的中学生以及他们的教练员将肩负着光荣而艰巨的任务。

为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在对三届学生施教实验的基础上，我们编写了《中学数学奥林匹克丛书》，希望《丛书》能为数学业余学校提供选读教材，能为老师与家长辅导学生提供参考资料，能成为中学生课余数学学习的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验又不很充足，这套《丛书》一定会有许多欠缺之处，希望各省、市数学奥林匹克教练员和学生们，以及广大的专家和读者批评指正。

梅向明　张君达

1988年2月2日

目　录

第一章 立体几何

高中学生学习立体几何的主要目的是为了培养学生的想象能力，掌握一些空间的图形的知识，为今后参加社会主义建设和生产实践作必要的准备；同时，为进一步学习空间解析几何、画法几何等，作必要的准备；另一方面，也为了培养和提高学生的逻辑推理能力及分析问题、解决问题的能力。

进入数学奥林匹克学校学习的同学们，在原来中学里学习立体几何时，为了照顾到因果关系，课本上的概念和基础知识不完全符合系统记忆的要求；但考虑到当全部概念和基础知识学完后，从整体的角度，重新回顾每个概念和基础知识时，将有深刻得多的理解；因此，掌握和熟记各个概念和定理，对于解好立体几何习题是十分必须的。现在，对于参加奥林匹克学校学习的同学们，有必要对立体几何的概念和定理，做重新的整理。

由于立体几何问题与平面几何有显著的区别。考虑到同学们在自己的中学里学习新课的过程中，在解题时的局限性，而多数立体几何题目在解法上和思考方法上的共同性。因而，从解题思考时的原则和细节两个方面，去总结其中的规律，对于提高解立体几何题目的能力，都极有益处。本章将就这两个方面问题，做出详细的论述。

§1 概　　述

1. 解立体几何题的思考程序

对所论图形产生正确的空间想像，是解立体几何题的前提。但对于每一个题目，怎样才能对题目的图形进行正确的空间想像呢？

这里首先应有合理的思考程序。

学习平面几何时，同学们大多已养成了这样的习惯：边读题，边顺手画图，题读毕图也完成，注意力随即转移到图上，再去进行分析。

但用这种方法去分析立体几何题目，就目前中学生的实际（未学过画法几何课）来说，却成为了一大弊端。

例1　已知A、B、$C\in$平面α，A'、B'、$C'\in$平面β，AA'，BB'，CC'交于O点。

求证：(1)AB与$A'B'$；BC与$B'C'$；CA与$C'A'$分别在同一个平面上；

(2)若$AB\cap A'B'=P$，$BC\cap B'C'=Q$；$AC\cap C'A'=R$，那么，P、Q、R在同一条直线上。

分析：许多同学，一边读题，一边顺手按图1-1的顺序画图。

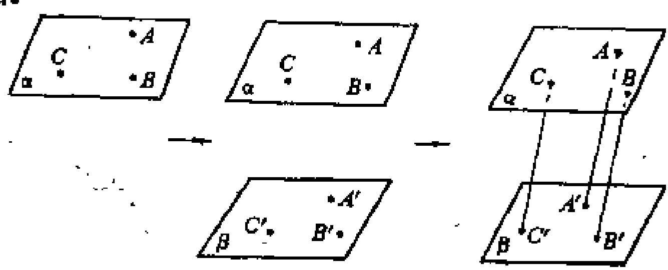

图1-1

为了符合已知中 AA'，BB'，CC' 交于一点 O 的要求，现将图 1-1 调整为图 1-2 的情形。

这时，根据“两条相交直线决定一个平面”的定理，不难证出结论(1)。

然而，结论(2)的证明却不是那么轻而易举的了，因为面对 $\alpha /\!/ \beta$ 的图 1-2，一些同学只是把 α 的位置稍做调整，得到了图 1-3，就急忙去思考证法，这当然是很困难的。因为在图 1-3上，即使从直观上，P，Q，R 也不在一条直线上。这个图，显然不正确。造成错误的原因之一，是原封不动地承袭了解平面几何问题时的思考程序：读一句已知条件，就顺笔添几条线，已知条件读完，图也画成，然后始终抓住这张图不放去思考。

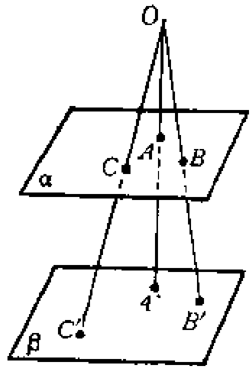

图1-2

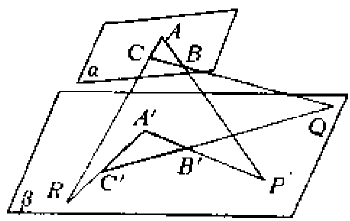

图1-3

用这种习惯去考虑立体几何题目，是不利于准确分析几何图形的。

考虑一道立体几何题目时，宜先把全题通读一遍，从整体上对图形有一个全面的了解后，再逐一去考虑它的各个细节。有时，当图形的整体轮廓不易迅速弄准，可以摆摆模型辅助思考，也可以画画草图，所谓画画草图，即从不同的角

度去勾画图形。又由已知条件的增加，逐步对图形作出修正或调整。

这样，对于本题来说，首先应给出平面 α 和 β 位置关系的两种可能：$\alpha /\!/ \beta$ 或 $\alpha \cap \beta = MN$，如图 1-4 所示。进一步读到 $AB \cap A'B' = M$，则只留下了 $\alpha \cap \beta = MN$ 的情况，由于两个相交平面的公共点都在它们的交线上，立即证出了欲证的结论：$P, Q, R \in MN$。就不需要也不可能画出如图 1-3 那种错图了。

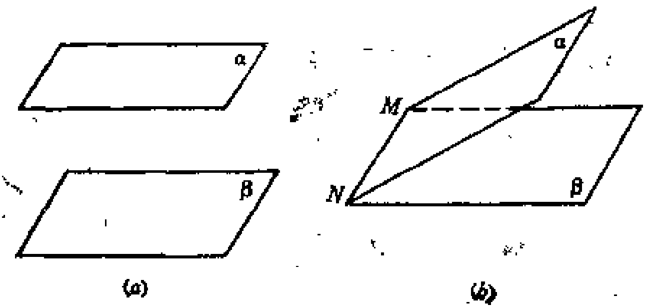

图 1-4

当然，读题的同时，如果用两块玻璃摆摆模型，更会迅速想像出图 1-4(b)的情形。

所以，作为解好立体几何题目的第一步，形成合理的思考程序：把全题通读之后，再着手画图；而且，要从整体到局部地画；宜用模型辅助思考；画图要多设想几种方案，逐步调整、修正，不要一蹴而成。

2. 养成在“移动”中进行观察的习惯

用所谓“动”的观点去观察和分析题目，是可以形成立体感的，这是能充分、准确地对图形进行空间想像的关键。人和动物之所以能分辨远近、层次，乃是两只眼睛向视网膜

发回了“对象”的两张不同角度的“影像”.也就是，随时有两个视线方向（每只眼睛是一个视线方向）.

我们这里所说的移动观察时立足的位置，绝不仅是移动从左眼到右眼这样一小段距离，而是要大角度地变化视线方向。要分别从上、下、左、右、前、后，甚至“钻进、钻出”地去观察（实际是设想），才能得到对图形的充分和准确的空间想像，而它是解出题目的前提。

例 2 选择正确结论（有且仅有一个结论是正确的）.

两条异面直线在一个平面上的投影是（ ）；

（A） 两条相交直线；

（B） 两条平行直线；

（C） 可能是两条相交直线，也可能是两条平行直线；

（D） 以上结论都不对。

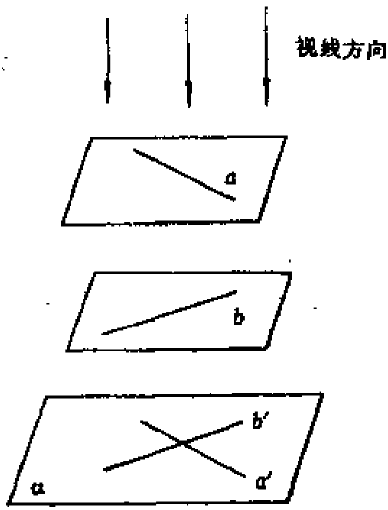

图 1-5

分析：通读全题后，如果画出了如图 1-5 的图形，并未违背题意，这时，如果没有按“动”的思想去思考，便会选择结论（A）。

或者，如果画出了图1-6所示的图形，便会选择结论（B）.

当既能从图 1-5 给出的视线方向，又从图 1-6 给出的视线方向去观察时，便会选择结论（C）。

这样，由于把观察时的立足点移动了一次，就得到了比结论（A）、或结论（B）要好些的结论（C）。

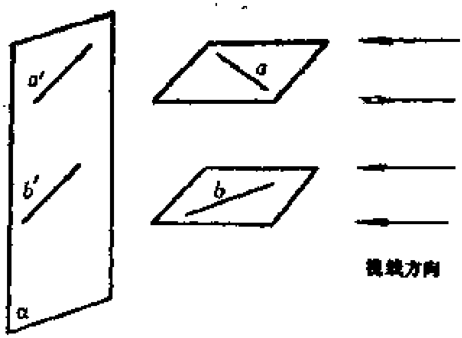

图1-6

但是，如果把立足点更多次地移动，把视线方向作全方位的变化，就会发现，当处于图1-7的视线方向时，异面直线a、b在同一平面α上的投影a'、b'，是一个点及一条直线，因而选择了结论(D)

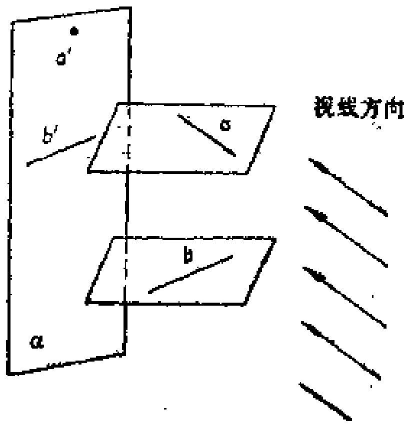

图1-7

说明：在选择结论(D)的思考中，才是做到了从前、后、上、下、左、右，甚至"钻进、钻出"地去观察（事实是设想），才是"动"的思想的一种表现。

例3 一个三棱锥$P-ABC$，三条侧棱PA、PB、PC两两垂直，且各长6，如图1-8所示。求V_{P-ABC}。

分析：由棱锥体积公式$V=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$。很自然地，

想到应该先计算 $S_{\triangle ABC}$及作出棱锥的高 PO，然后计算 PO 的长，但是，这个过程相当冗长。

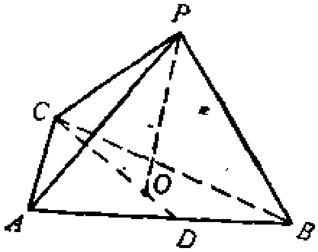

图1-8

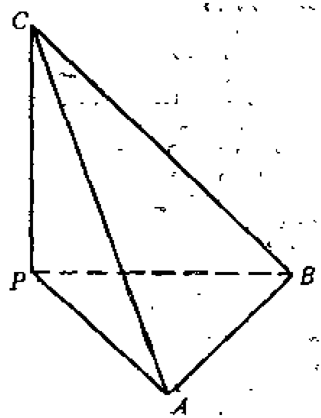

图1-9

然而，如果把棱锥 $P-ABC$，按图 1-9 所示的方式进行放置。

由 $PC\perp PA$ 及 $PC\perp PB$，有 PC为棱锥$C-PAB$ 的高。

于是 $V_{C-PAB}=\frac{1}{3}PC\cdot S_{RT\triangle ABP}$

$$=\frac{1}{3}6\times\frac{1}{2}\times6\times6$$

$$=36$$

说明：解法二显然简捷得多，它的思路仍然是“动”的思想。

表面上看，观察者立足的位置似乎没有改变，但根据运动和静止的相对性原理，如果观察者不动，把“对象”进行翻转，相当于被观察的对象不动，而观察者变换了自己的视线方向，这就得到了解法二。

需要指出，把 $a\perp b$，同时看成 $b\perp a$，这也是一种转换视线方向。而这种方法，对于初学者在解题的思考中，常常起积极作用。

例4 已知四面体 $A\text{-}BCD$ 中，BCD 面和 ACD 面上的高线 AE、BF 是相交直线，如图1-10所示。

求证：面 ABD 和面 ABC 的高线也是相交直线。

分析：本题有相当的难度，因为已知条件太少，令人不知从何处入手。

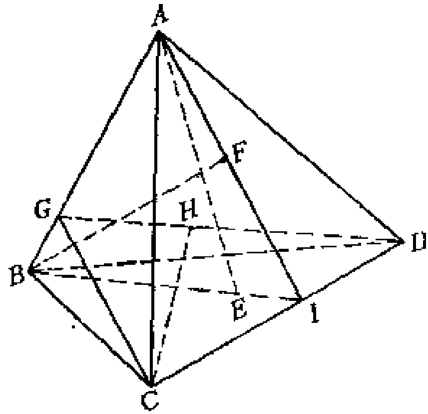

图 1-10

如果我们总是把 $a\perp b$ 同时看作 $b\perp a$ 一起来思考的话，就有利于找出证明本题的方法：

由已知 $AE\perp$ 平面 $BCO\Longrightarrow AE\perp CD$，换写作 $CD\perp AE$。同样地，有 $CD\perp AF$。

这样，CD 便垂直于相交直线 AE 与 AF 决定的平面 $ABEF\Longrightarrow CD\perp AB$。

如果注意到本题条件和结论的对称性时，自然会猜想，AB 是不是应该和欲证相交的另两条高线与 CD 共同决定的平面垂直？

因而，先构造这个猜想中的平面：

作四面体的面 ABD 的高线 CH，得到 $CH\perp AB$，换

写作$AB\perp CH$，再由已证出的$CD\perp AB$，换写为$AB\perp CD$。立即得到，AB垂直于CD与CH所决定的平面CDH。这样，过AB的平面ABC，就垂直于平面CDH，则它们的交线应是CG。这里，G是DH的延长线与AB的交点。

这时，在平面CDH内，过D所作CG的垂线，必是四面体$A\text{-}BCD$在面ABC上的高线（过互相垂直的平面中的一个平面上一点所作交线的垂线，必垂直于另一平面），而它当然与CH相交（同一三角形中的两条高线相交）.

用“动”的思想对图形进行想像，还有一层含义，在读题时，做这样的思考：随着已知条件的逐步给出，要逐步去推敲所论图形的固定性。

这个思考过程，有助于发现达到结论应循的途径。

例如对于解计算题目，如果所论图形完全固定，那么，它的各部分就都是可求值的。只要考虑如何选择最简捷的路径；而如果所讨论图形的某些部分尚不能固定，那么，决不要试图通过计算这些部分的值而去达到结论。

例 5 已知三棱锥$P\text{-}ABC$，顶点P在底面的投影H是$\triangle ABC$的垂心，$PB=PC$，$BC=2$，侧面PBC与底面所成的二面角的度数为60°，如图1-11所示.求棱锥$P\text{-}ABC$的体积V_{P-ABC}。

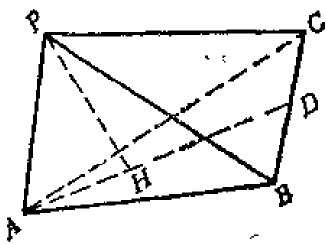

图1-11

分析：由于$V_{棱锥}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$，一般很容易想到先求$S_{\triangle ABC}$，由于已知$BC=2$，只需求出$\triangle ABC$中$BC$边上的

高，再求出棱锥的高，V_{P-ABC}便可求出了。

但，沿此路往下进行，本题永无解出之时。

因为，由本题所给条件，三棱锥 $P-ABC$ 的底面$\triangle ABC$和棱锥的高都是不固定的。

事实上，BC 长为 2 是固定的；二面角 $P-BCA$为 60°是固定的；再由已知 $P=PC$，可知棱锥 $P-ABC$ 的顶点 P 在 BC的一条垂直平分线 DM 上，但 P点在DM上的位置可以是 P_1、或 P_2、或 P_3、或……，无法确定。因而，棱锥的高不可能固定，那么，企图通过求出高再去计算体积，当然永远不会达到目的（如图1-12所示）.

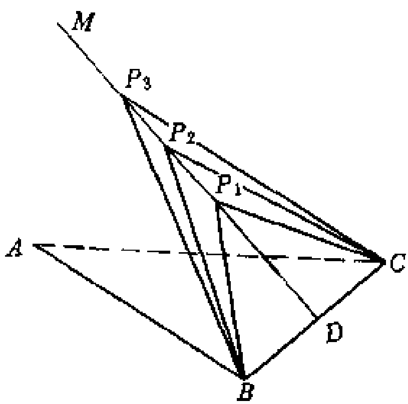

图1-12

那么，本题的要求，又是否可以达到呢？我们仍用“动”的思想去作分析：

在底面$\triangle ABC$ 中，BC 是固定的，P 在底面的投影是$\triangle ABC$的垂心 H，并且 $PB=PC$，可证 $BH=CH$。用平面几何知识，易证 $AB=AC$，但再不可能对$\triangle ABC$ 的形状及度量做进一步的固定了。因为二面角 $P-BC-A$ 为 60°，并不限制 A 的位置。事实上，A 将在 BC 的垂直平分线上滑动，即 $\triangle ABC$ 的高不能确定，当然 $S_{\triangle ABC}$ 就不确定，更无法由它去计算棱锥的体积了。

这样，在$\triangle ABC$ 的高 AD 和棱锥的高 PH 都不固定的情况下，棱锥的体积还有可能算出吗？答案是肯定的！

这种情况在代数上是经常出现的。

例如，由条件 $a_6a_{15}+a_9a_{12}=4$，并不能确定等比数列 $\{a_n\}$，但却可以算出它的某些项的某种组合，如可以计算乘积 $a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}\cdot a_{12}$ 如下：

由　$a_6a_{15}+a_9a_{12}=4\Longrightarrow a_1^2q^{19}=2$，

则　$a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}\cdot a_{12}=a_1^4q^{38}=4$。

本题同样是计算不能确定的量 PH 与 AD 的乘积。这里的前提，首先是这两个量要满足“彼长此消”，决不能“水涨船高”.

由已知，H是等腰$\triangle ABC$的垂心，随P点在DM上远离D点而去，那么，如图1-13所示，H也要在DA上远离D点而去。

即　$P_2D>P_1D$时，$\Longrightarrow H_2D>H_1D$

这时，粗心的同学，会想当然地以为，A点也将远离BC而去，那么，棱锥$P\text{-}ABC$将不可求积了。

事实上，对于等腰$\triangle ABC$，随着垂心H的远离底边

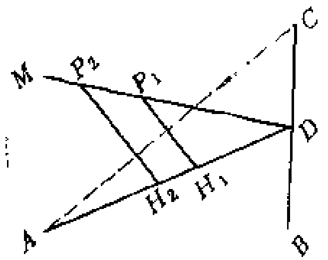

图1-13