高等数学

（上册）

刘修生 夏恩德 主编

华中科技大学出版社
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

高　等　数　学

（上册）

主　编　刘修生　夏恩德
副主编　朱　章　饶林森　程铭东

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/刘修生　夏恩德　主编
武汉:华中科技大学出版社,2001 年 9 月
ISBN 7-5609-2560-X

Ⅰ.高…
Ⅱ.①刘…　②夏…　③朱…　④饶…　⑤程…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

高等数学(上册)　　刘修生　夏恩德　主编

责任编辑:曾　光　钱文霖　　封面设计:刘　卉
责任校对:张兴田　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　　排:华中科技大学出版社照排室
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:8.125　字数:200 000
版次:2001 年 9 月第 1 版　印次:2003 年 8 月第 2 次印刷　定价:10.00 元
ISBN 7-5609-2560-X/O·240

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内容简介

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用等。各节后有习题，各章后有复习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨，说理浅显，叙述详细，例题丰富，便于教，利于学。

本书适合作为高职、高专院校及相当层次的其他院校的教材，也可供广大自修者自学使用。

前　言

本书是根据“高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求”以及为适应高等工程专科学校培养高等技术应用型人材的需要编写的.在编写过程中,我们力求贯彻以应用为目的,以必需、够用为度,兼顾适度发展和少而精的基本原则,结合多年来积累的工程专科高等数学教学改革的经验和体会,在以下几个方面作出了努力.

1. 在课程结构上,我们将高等数学课程分为两个平台:基础数学、选学数学.基础数学的内容是最基本的,主要目的是提高学生的学习兴趣及让学生尽快适应大学的学习方法,加强学生的数学基本功训练;选学数学由各工科专业按各自需求和发展需要进行选学.书中带“*”的为选学数学部分.

2. 在教学内容上,我们削弱了那些过分形式化和严格化的内容,如极限论中的 ε-N 与 ε-δ 语言;删去了那些过分繁琐、过分强调技巧性的内容,如求极限、求不定积分等复杂的计算技巧,注意了推证思路的阐述,并尽量设法结合几何意义进行直观解释.

3. 引入计算机软件,增加了数学演示与实验、数学建模的内容,体现了数学改革的方向.

本书分上、下两册.上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等,共5章.参考教学时数为72学时.下册包括常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学建模初步等,共6章.参考教学时数为68学时.

本书由刘修生、夏恩德任主编.朱章、饶林森、程铭东任副主编.参加本书上、下册编写的还有:(以姓氏笔画为序)方小平、何艳平、陈全和、秦熙明.张晓燕和梅云广同志也参加了本书编写的多

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

项实际工作.

本书在编写过程中,得到黄石高等专科学校教务处、教学委员会和公共课部的大力支持和关心,在此一并致谢.

由于编者的水平有限,书中存在一些缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正.

编者

2001年7月

目　　录

第一章　函数与极限 …………………………………… (1)

1.1　函数 …………………………………………… (1)

1.1.1　函数 ……………………………………… (1)

1.1.2　函数的几种特性 ………………………… (6)

1.1.3　反函数 …………………………………… (9)

1.1.4　复合函数　初等函数 …………………… (11)

习题 1-1 ……………………………………………… (12)

1.2　数列的极限 …………………………………… (15)

习题 1-2 ……………………………………………… (20)

1.3　函数的极限 …………………………………… (20)

1.3.1　自变量趋向有限值时函数的极限 ……… (20)

1.3.2　自变量趋向无穷大时函数的极限 ……… (24)

习题 1-3 ……………………………………………… (25)

1.4　无穷小与无穷大 ……………………………… (26)

1.4.1　无穷小 …………………………………… (26)

1.4.2　无穷大 …………………………………… (27)

习题 1-4 ……………………………………………… (28)

1.5　极限运算法则 ………………………………… (29)

习题 1-5 ……………………………………………… (35)

1.6　极限存在准则及两个重要极限 ……………… (36)

习题 1-6 ……………………………………………… (41)

1.7　无穷小的比较 ………………………………… (42)

习题 1-7 ……………………………………………… (44)

1.8　函数连续性与间断点 ………………………… (44)

1.8.1 函数的连续性 …………………………… (44)
1.8.2 函数的间断点 …………………………… (46)
习题 1-8 …………………………………… (48)
1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性………… (49)
1.9.1 连续函数的和、差、积及商的连续性 ………… (49)
1.9.2 反函数与复合函数的连续性 ……………… (50)
1.9.3 初等函数的连续性 ………………………… (51)
习题 1-9 …………………………………… (52)
1.10 闭区间上连续函数的性质 ………………… (53)
1 10.1 最大值和最小值定理 …………………… (53)
1.10.2 介值定理 ………………………………… (55)
习题 1-10 …………………………………… (56)
1.11 演示与实验 ……………………………… (56)
习题 1-11 …………………………………… (59)
复习题一 …………………………………… (60)
第二章 导数与微分 ………………………………… (64)
2.1 导数概念………………………………………… (64)
2.1.1 引例 ………………………………………… (64)
2.1 2 导数的定义 ……………………………… (66)
2.1 3 导数的几何意义…………………………… (69)
2.1.4 可导与连续的关系 ………………………… (71)
习题 2-1 …………………………………… (72)
2.2 求导法则与基本求导公式…………………… (73)
2 2.1 基本初等函数及常数的导数 ……………… (74)
2.2.2 反函数的导数 ……………………………… (76)
2.2.3 函数的和、差、积、商的求导法则 ………… (77)
2 2.4 复合函数的导数…………………………… (80)
习题 2-2 …………………………………… (83)
2.3 高阶导数………………………………………… (85)

习题 2-3 …………………………………………………………… (87)

2.4 隐函数的导数及由参数方程所确定的函数的导数 …………………………………………………………… (88)

2.4.1 隐函数的导数 ………………………………………… (88)

2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数…………………… (91)

习题 2-4 …………………………………………………………… (94)

2.5 微分的概念及其应用………………………………………… (95)

2.5.1 微分的概念 ………………………………………… (95)

2.5.2 微分的几何意义…………………………………… (98)

2.5.3 微分的基本公式及其运算法则 …………………… (99)

2.5.4 微分在近似计算中的应用………………………… (101)

习题 2-5 …………………………………………………………… (103)

2.6 演示与实验 ………………………………………………… (105)

习题 2-6 …………………………………………………………… (106)

复习题二…………………………………………………………… (106)

第三章 中值定理与导数的应用 ………………………… (109)

3.1 微分学中值定理 ………………………………………… (109)

3.1.1 罗尔定理…………………………………………… (109)

3.1.2 拉格朗日中值定理 ………………………………… (110)

3.1.3 柯西中值定理 ……………………………………… (112)

习题 3-1 …………………………………………………………… (113)

3.2 罗必塔法则 ………………………………………………… (113)

3 2.1 罗必塔法则 ………………………………………… (113)

3.2.2 其他类型未定式 …………………………………… (116)

习题 3-2 …………………………………………………………… (117)

3.3 函数单调性的判别法及极值 …………………………… (117)

3.3.1 函数单调性的判别法 ……………………………… (117)

3.3.2 函数的极值 ………………………………………… (120)

习题 3-3 …………………………………………………………… (124)

3.4 函数的最大值最小值及其应用 …………………… (125)
3.4.1 求已知函数的最大值最小值 …………………… (125)
3.4.2 经济学中的最大值最小值问题 …………………… (126)
3.4.3 其他应用问题 …………………… (127)
习题 3-4 …………………… (128)
3.5 曲线的凹凸性与拐点 …………………… (129)
习题 3-5 …………………… (132)
3.6 函数图形的描绘 …………………… (132)
习题 3-6 …………………… (135)
3.7 演示与实验 …………………… (135)
习题 3-7 …………………… (137)
复习题三 …………………… (138)
第四章 不定积分 …………………… (141)
4.1 不定积分的概念与性质 …………………… (141)
4.1.1 原函数与不定积分的概念 …………………… (141)
4.1.2 基本积分表 …………………… (144)
4.1.3 不定积分的性质 …………………… (145)
习题 4-1 …………………… (147)
4.2 换元积分法 …………………… (148)
4.2.1 第一类换元法 …………………… (148)
4.2.2 第二类换元法 …………………… (151)
习题 4-2 …………………… (153)
4.3 分部积分法 …………………… (154)
习题 4-3 …………………… (156)
4.4 三种函数简单形式的积分举例 …………………… (157)
4.4.1 有理函数积分举例 …………………… (157)
4.4.2 三角函数有理式积分举例 …………………… (159)
4.4.3 简单无理函数积分举例 …………………… (160)
习题 4-4 …………………… (161)

4.5 演示与实验 …………………………………………………… (162)
习题 4-5 …………………………………………………………… (163)
复习题四 …………………………………………………………… (163)
第五章 定积分及其应用 ………………………………………… (167)
5.1 定积分的概念和性质 ……………………………………… (167)
5.1.1 定积分的概念 …………………………………………… (167)
5.1.2 定积分的性质 …………………………………………… (173)
5.1.3 举例 ……………………………………………………… (175)
习题 5-1 …………………………………………………………… (177)
5.2 微积分学的基本公式 ……………………………………… (177)
习题 5-2 …………………………………………………………… (181)
5.3 定积分的换元法 …………………………………………… (183)
习题 5-3 …………………………………………………………… (187)
5.4 定积分的分部积分法 ……………………………………… (188)
习题 5-4 …………………………………………………………… (190)
*5.5 积分区间为无穷区间的广义积分 ……………………… (191)
习题 5-5 …………………………………………………………… (193)
5.6 定积分的几何应用 ………………………………………… (193)
5.6.1 定积分的微元法 ………………………………………… (194)
5.6.2 平面图形的面积 ………………………………………… (195)
5.6.3 体积 ……………………………………………………… (200)
习题 5-6 …………………………………………………………… (204)
*5.7 定积分在物理中的应用举例 …………………………… (206)
5.7.1 变力所作的功 …………………………………………… (207)
5.7.2 液体压力 ………………………………………………… (207)
习题 5-7 …………………………………………………………… (209)
5.8 演示与实验 ………………………………………………… (210)
5.8.1 用 Mathematica 计算定积分 …………………………… (210)
5.8.2 用 Mathematica 进行数值积分 ………………………… (211)

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

习题 5-8 …………………………………………………… (211)
复习题五 …………………………………………………… (212)
附录一　几种常用的曲线 ………………………………………… (215)
附录二　积分表 …………………………………………………… (219)
习题答案 …………………………………………………… (229)

第一章　函数与极限

微积分与中学所学习的数学内容有重大区别，中学数学研究的对象基本是不变的量，而作为高等数学基本内容之一的微积分研究的是变动的量. 所谓函数就是变量之间的对应关系，极限方法则是研究函数的一种基本方法. 本章将以中学数学为基础，介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　　数

1.1.1　函数

虽然中学数学教材里介绍过函数概念，但对这一概念的理解将随我们继续学习得到拓宽和加深.

下面先举两个函数的例子.

例 1　在$\triangle ABC$中，设边长a、b一定，那么$\triangle ABC$的面积S可以表示为

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C, \quad 0 < C < \pi$$

当a、b两边的夹角C在开区间$(0,\pi)$内任意取定一个数值时，按上式计算，面积S就有确定的数值与之对应.

例 2　物体作自由落体运动，设开始下落的时刻为$t=0$，落地时刻为$t=T$，那么在任意时刻$t(0\leqslant t\leqslant T)$物体下落的路程$s$可用公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

表示，其中 g 是重力加速度．当表示时间的量 t 在闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时，表示路程的量 s 按上式就有确定的数值与之对应.

我们在研究某一问题时，常常会遇到两种不同的量，一种是保持一确定数值的量，这种量叫做常量，例如在范围不大的地区内重力加速度 g 是常量，另一种是可以取不同数值的量，称为变量，如例 1 中$\triangle ABC$ 的内角 C 和面积 S 是变量，例 2 中的时间 t 和路程 s 是变量.

设变量 x 所取数值的全体组成数集 M，从集合的观点看，变量 x 也可理解为数集 M 中任何元素的表示符.如例 2 中的变量 t，就是表示数集

$$[0,T]=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant T\}$$

中任何元素的符号.特殊地，如果数集是单元素集，那么表示数集中元素的符号就是常量，从这个意义上说，常量可看作变量的特殊情形.

例 1 和例 2 中各有两个变量，且两个变量之间都有一定的对应关系，这种对应关系正是函数概念的实质.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$（或 $f: x\mapsto y$）. x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D（或记作 $D(f)$）叫做这个函数的定义域.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$，于是我们也将 $f(x)$看作是函数在任意一点 $x\in D$ 处的函数值的符号.

当 x 遍取 D 中各数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域，W 也可以记作 $f(D)$.

对不同的函数需要加以区别时，应该采用不同的函数记号，如

$f(x),\varphi(x),F(x),\Phi(x)$等等.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如例1、例2中函数的定义域应依次为$(0,\pi)$与$[0,T]$.

当我们抽象地研究用算式表达的函数时,约定函数的定义域就是使该算式有意义的自变量的取值范围.例如函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$,函数$y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$的定义域是$(1,2)\cup(2,+\infty)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是只有一个,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数.以上所举的函数例子都是单值函数.下面举一个多值函数的例子.

例3 在直角坐标系中,半径为r,圆心在原点的圆的方程是$x^2+y^2=r^2$,这方程在闭区间$[-r,r]$上确定一个以x为自变量、y为因变量的函数.当x取$-r$或r时,对应的函数值都只有一个,但当x取开区间$(-r,r)$内的任一数值时,对应的函数值就有两个.所以该函数是多值函数.

以后若无特别说明,函数都是指单值函数.

由函数的定义可知,确定函数的两要素是定义域和两变量的对应法则.两个函数只要定义域和对应法则完全相同,它们就是相同的函数,与用什么符号表示自变量和因变量无关.如函数$y=\sqrt{x^3}$和函数$u=t\sqrt{t}$是相同的函数.

设函数$y=f(x)$的定义域为D,对于在D内任意取定的一个数值x,有与之对应的函数值y,这样就确定了xOy平面上的一个点(x,y).当x遍取D内的每一个数值时,所得点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数$y=f(x)$的图形(图1-1),

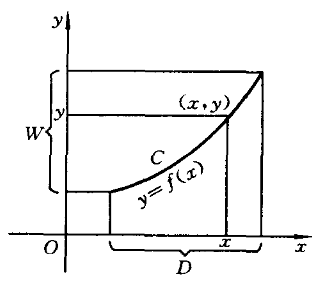

图1-1

图中的 W 表示函数 $y=f(x)$的值域.

例 4 判断函数 $y=\sqrt{x+2}$的图形形状.

解 将函数式两边平方后得方程 $y^2=x+2$. 因方程 $y^2=x$ 表示顶点在原点且开口向右的一条抛物线(图 1-2),故把这条抛物线向左平移两个单位就得到方程 $y^2=x+2$ 的图形. 由于 $y=\sqrt{x+2}\geqslant 0$,所以函数 $y=\sqrt{x+2}$的图形是这条抛物线的上半部分(图 1-3)

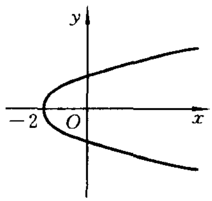

图 1-2

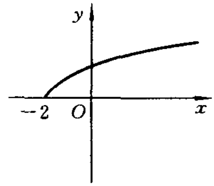

图 1-3

有时一个函数在其定义域的不同部分上用不同的解析式来表示,这种函数被称为分段函数.

以下举几个分段函数的例子.

例 5 绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时} \end{cases}$$

此函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=(0,+\infty)$,图形如图 1-4 所示.

例 6 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & \text{当 } x>0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时} \\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时} \end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-5 所示. 对任何 $x\in\mathbf{R}$,有

$$x = \mathrm{sgn}x \cdot |x|$$

例如，$\mathrm{sgn}(-3) \cdot |-3| = -1 \cdot 3 = -3$.

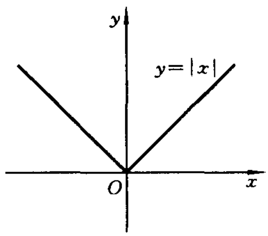

图 1-4

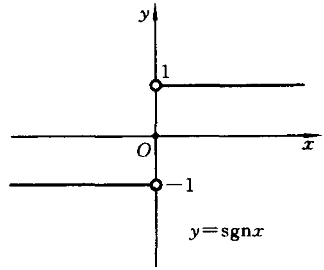

图 1-5

例 7　取整函数

$$f(x) = [x], \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

这里，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，例如$[0.7]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-1]=-1$，$[-2.5]=-3$. 取整函数的图形如图 1-6 所示，此图形称为阶梯曲线，在 x 为整数值处，图形发生跳跃.

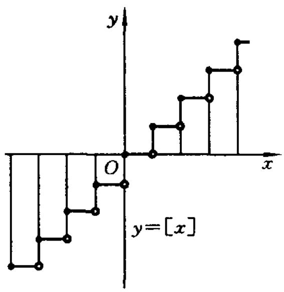

图 1-6

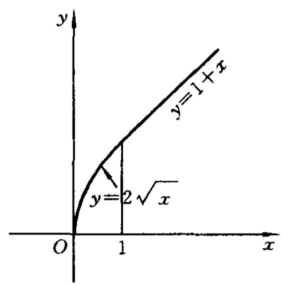

图 1-7

例 8　函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ 时} \\ 1 + x, & \text{当 } x > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com