高等学校教学用書

高等数学

(干部特别班适用)

王梨芳　刘宸三　胡淑洪
程紫明　　錢文俠　編

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等数学

(干部特别班适用)

王棨芳　刘宝三　胡淑供
程紫明　　　錢文俠　編

高等教育出版社

本書是北京航空学院、清华大学、北京工业学院、北京鋼鉄学院、北京矿业学院五院校特别班的数学教师集体編写的数学教材；其特点为尽量結合实用，尽量利用几何或直观的説明，来講述数学理論。

本書包括一般高等数学課程中的內容：平面及空間的解析几何，一元及多元（二元）函数的微积分学以及級数論等。由于講解方法特別照顧初学者，本書不仅适用于特别班的学員，而且也可作为紅專大学的試用教材以及学生和干部的自修用書。

高　等　数　学

（干部特别班适用）

王綏芳　刘宝三　胡淑洪　程紫明　錢文侠　編

高等教育出版社出版　北京宣武門內承恩寺7号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）
北京市印刷一厂印刷　新华書店發行

統一書号13010·535　開本850×1168 1/32　印張17 2/16
字數474,000　印數00001—20,000　定價(8)￥1.90
1958年12月第1版　1958年12月北京第1次印刷

序

为了貫徹党在高等学校中的阶級路綫，提高干部特别班学員的学習質量，大家都迫切地要求編写一本适合他們特点的高等数学教材。为此，北京航空学院，清华大学，北京工业学院，北京鋼鉄学院，北京矿业学院五院校干部特别班教师联合編写了这本書。編写过程中曾广泛地征求过干部班学員及有关教师的意見，并参考过去高等教育部批准的“高等数学教学大綱，高等工业学校用(280—300学时)”。

在教材編写方面尽量体現下列几个特点：

1. 內容的叙述上尽量体現辯証唯物主义的思想方法，以期适合于学員們的認識过程。

2. 对于每一新的概念均由若干具体問題出發，引导到抽象的数学定义；講定义时結合几何意义，物理意义，并用具体数字的例子来說明。

3. 貫徹从具体到抽象的原則，理論的闡述尽量从举例說明到一般的概括。

4. 具体的运算要比較詳細地一步步推导。

5. 重視实际应用，尽量与邻近課程、后修課程相結合。体現数学是工具的原則。

6. 教材組織上体現反复巩固的原則。

7. 貫徹教学中的直观原則，借助于几何圖象，及学員們已經具有的知識来深入了解概念与理論。針对学員的特点对一些数学的論証与推导作适当的精簡，或簡化了証明或給出例証，或从几何上加以說明。

8. 提出問題要明确，必要时可先摆出結論及具体应用的例子。少用些数学名詞，文字叙述要簡單清楚。叙述与結論要条理分明。便于

記忆。

9. 每一章均有总結，問題，習題，帮助学員們作阶段性的总結。

10. 照顧到各專业对高等数学的不同要求，教材中有基本內容，也适当地安排一些附加的內容。

这本書的內容重点是放在平面解析几何，一元函数的微分学，积分学，微分方程这几部分。

第一章以前列出初等数学的基本公式以备随时参考。

第一章是行列式部分，着重于利用行列式解二元三元一次联立方程。

第二、三章是解析几何部分：平面、空間两部分的內容結构上，采取了前后一致的叙述方法。在平面解析几何中比較多地重視由所給方程繪出曲綫的輪廓。直綫方程以点斜式为主。極坐标及参数方程，只就常見的例子加以說明。空間解析几何中提出了矢量，并作了适当的运用。平面方程以点法式为主，直綫方程以标准式为主。关于二次柱面及旋轉面及二次曲面只作簡單的說明，教学中要用模型帮助了解。

第四、五章函数極限連續部分講得比較精簡，概念提得簡單明了，也足够供以后的运用。复合函数講的比較簡單，反函数不作一般介紹。对于基本初等函数的圖形給予較多的注意。在極限定义中只用 ε，不用 N 与 δ，同时在具体例子中仍用数字闡明 δ 与 N 的意义与作用。連續概念，極限存在准則，連續函数的性質等都用圖形作直观的說明。

第六七章講导数微分及其应用部分。在这两章的理論部分中，精簡了一些数学推导。例如冪函数导数公式及复合函数微分法公式，中値公式与广义中値公式都只給出簡單的証明或几何上的說明。在应用部分中，增减性、極値、凹凸性、拐点判別法尽量利用圖形說明。在教材次序的安排上，注意到理論与应用的配合。理論与实用互相交錯，可以及早接触到实用問題。这一章中的台劳公式部分是專为不講級数的專业預备的。对于講无穷級数的專业，最好略去这部分。

第八、九、十这三章是一元函数的积分学。我們采取了定积分——不定积分——定积分的計算与应用，这样的三段进程。在已經会算簡單的原函数的基础上，第一进程中提出了定积分的全部問題：包含定义、計算、应用及性質。在学生对計算原函数有迫切要求的情况下，我們进入了不定积分部分。然后回过头来結合理論与計算，討論大量的应用問題。这样处理教材，旣能起反复巩固的作用，又有明确的目的性。第八章所采取的方式是理論計算与应用齐头并进，使他們能起互相巩固的作用，第九章只涉及最主要的不定积分法，在这一章末了，希望教师們敎会学員們怎样查不定积分表。第十章把定积分应用到各种問題上去，在运用的方法上，尽量与邻近的課程取得一致。

第十一章微分方程部分，一貫采取边建立方程，边解方程的精神，取材上尽量結合物理力学上的需要。一阶方程只介紹可分离变量及綫性两种；二阶特殊情况只介紹 $y''=f(x)$，$y''=f(y)$ 及 $y''=f(x, y')$；二阶綫性方程只介紹常系数的情况；二阶綫性常系数非齐次方程，只介紹自由項为 Ae^{mx} 及 $M\cos\omega x+N\sin\omega x$ 的情况。最后再举例說明微分方程的建立和应用。

第十二章是无穷級数，我們用級数在近似計算中的应用把它貫穿起来。在数項級数的判斂准則中，着重提出比率准則。冪級数的收斂域直接利用比率准則算出。冪級数在近似計算中的应用是本章中的中心問題。富氏級数是为个别專业預备的补充教材，所举例子都是实用中常見的。

第十三、十四、十五章是多元函数微积分。这一部分着重于計算方法及应用。多元函数微分法只涉及主要的計算問題，極值問題只給出必要条件。对重积分化为二次积分，采取了直观性較强的从截面面积函数推导的方法。重积分应用通过例子加以說明。曲綫积分部分，仅講了对坐标的曲綫积分，由作功問題直接定义 $\int Xdx+Ydy$。对曲綫积分与路綫无关問題仅給出判断方法。

根据几个院校过去的經驗，以 220 学时講本書的內容时要删去一些星号的部分。在教学方式上，講課与習題課最好不作严格划分，以灵活掌握为宜。对于基本概念部分如导函数，定积分，講課后也可进行小組討論。講課时，应尽量多用直观教具，在習題計算上应时时运用計算尺及数学表，以培养数字計算的能力。此外，在整个教学过程中，应多做阶段性的复習与总結。无論是講課或習題課，都要使整个課程內容彼此呼应，反复巩固是提高学習質量的重要条件之一。

本書編写得很倉促，并且編者們对干部特別班的数学教学沒有什么成熟的經驗，这个尝試性的教本一定有很多缺点，我們期待着大家的指教，以便他日修訂。

本書的集体編写是在教育部的領导下完成的。北京矿业学院在各方面大力支持这件工作，清华大学赵訪熊同志曾为本書仔細审閱并提出宝貴意見，在此一并表示深切的謝意。

五院校联合編写小組序于北京。1958.8 月

目 录

序 …… vii

引言 …… 1

基本公式 …… 3

第一章 行列式 …… 17

1-1 二阶行列式 1-2 三阶行列式1-3 行列式的性質
1-4 行列式的一般展开法 1-5* n阶行列式 n元一次方程的解
总結
問題和習題

第二章 平面解析几何 …… 40

2-1 平面上直角坐标系 几个簡單問題 2-2 曲綫与方程 2-3 直綫
2-4 二次曲綫 2-5 極坐标系 2-6 直角坐标中的参数方程
总結
問題和習題

第三章 空間解析几何 …… 98

3-1 空間直角坐标 3-2 有向綫段及投影 3-3 矢量代数
3-4 曲面与方程以及曲綫与方程 3-5 平面与直綫 3-6 最簡單的二次曲面
总結
問題和習題

第四章 函数 …… 144

4-1 常量与变量 4-2 函数的定义 4-3 函数的記号 4-4 函数的定义域
4-5 函数表示法 4-6 复合函数 4-7 基本初等函数与初等函数
4-8 幂函数 $y=x^n$ 的圖形 4-9 指数函数与对数函数的圖形 4-10 三角函数的圖形
4-11 反三角函数的圖形
总結
問題和習題

第五章 極限与連續 …… 163

5-1 絕对值及其性質 5-2 函数的極限 5-3 極限的运算 5-4 无穷小量
5-5 无穷大量 5-6 增量 5-7 函数的連續性 5-8 函数的間斷点
5-9 連續函数的运算 初等函数的連續性 5-10 在閉区間上連續的函数的性質

5-11 極限的存在准則 5-12 两个重要的極限 5-13 双曲函数及其圖形
5-14 无穷小量的比較 5-15 几个求極限的方法
总結
問題和習題

第六章 导数及其应用……18

6-1 均匀变化 6-2 非均匀变化函数的变化率 6-3 导数
6-4 导数的几何意义 6-5 导数公式 6-6 常量与自变量的导数
6-7 和、积、商的导数 6-8 复合函数的导数 6-9 冪函数的导数
6-10 隐函数及其导数 6-11 中值公式 6-12 函数的增减性
6-13 函数的極值 6-14 函数在区間上的最大值和最小值 6-15 导数公式(續)
6-16 对数函数的导数 6-17 指数函数的导数 6-18 三角函数的导数
6-19 反三角函数的导数 6-20 原函数 6-21 高阶导数 6-22 曲綫的凹凸
6-23 極值的第二判定法 6-24 研究函数的一般程序 举例
6-25 参量所确定的函数及其导数 6-26 广义中値公式 6-27 不定式的定値法則
总結
問題和習題

第七章 微分及其应用……240

7-1 微分及其几何意义 7-2 微分在近似計算上的应用 7-3 导数与微分的記号 微分运算公式 7-4 弧長的微分 7-5 曲率 7-6 曲率半徑、曲率中心 曲率圓
7-7 漸屈綫及漸伸綫 7-8 台劳公式
总結
問題和習題

第八章 定积分……260

8-1 定积分概念 8-2 积分学的基本定理(牛頓-萊布尼茲公式)
8-3 定积分的近似計算法 8-4 运用定积分的几个例子 8-5 定积分的性質
总結
問題和習題

第九章 不定积分……292

9-1 不定积分概念 9-2 不定积分的性質
9-3 不定积分的部分积分法(分部积分法) 9-4 不定积分的变量置換法(引入新变量法)
总結
問題和習題

第十章 定积分的計算及应用……32

10-1 定积分的計算 10-2 在直角坐标中面积的計算
10-3 由平行截面面积計算物体的体积 10-4 曲綫的弧長 10-5 均匀薄片的重心
*10-6 在区間[a,b]上函数值的平均値 10-7 物理問題举例

10-8 无穷区間上的广义积分举例 *10-9 近似积分法
总結
問題和習題
第十一章 微分方程……………………………………………………367
11-1 一般概念 11-2 一阶微分方程 11-3 特殊二阶微分方程
11-4 常系数二阶綫性齐次微分方程 11-5 常系数二阶綫性非齐次微分方程
11-6 微分方程的应用举例
总結
問題和習題
第十二章 无穷級数……………………………………………………410
12-1 整标函数的極限(复習) 12-2 数項級数 数項級数的收斂性
12-3 数項級数收斂的必要条件 12-4 无穷等比級数与 p 級数
12-5 交錯数項級数 12-6 比率准則(达朗貝尔准則) 12-7 冪級数及其收斂域收斂半徑 12-8 冪級数的逐項微分与逐項积分
12-9 函数展开为冪級数(台劳級数) 12-10 台劳級数在近似計算中的应用
*12-11 以 2π 为周期的函数展开为三角級数(富里哀級数)
12-12 以 $2L$ 为周期的函数
总結
問題和習題
第十三章 多元函数……………………………………………………463
13-1 基本概念 13-2 二元函数的导数和微分 13-3 極值及其必要条件
*13-4 方向导数
总結
問題和習題
第十四章 重积分……………………………………………………489
14-1 二重积分概念 14-2 二重积分計算方法 14-3 二重积分应用
*14-4 三重积分
总結
問題和習題
第十五章 曲綫积分……………………………………………………520
15-1 曲綫积分概念 15-2 曲綫积分与路綫无关的条件 *15-3 格林公式
总結
問題和習題

引 言

（一）数学，从哪里来？到哪里去？

在原始时期，由于人类要計算劳动果实和分配产品，就产生了自然数的概念。

后来，人們为了要定季节以便从事农业生产，需要研究天文学，而天文学上的問題往往要借助于数学才能解决，因此就不得不从事于数学的研究。如我国在周朝由于天文的需要就創出了勾股弦定理（見周髀算經）。

此后，农业生产的不断發展，对于丈量田地及計算产品，非常迫切；在埃及就产生了几何学，在我国也产生了九章算术。

到十七八世紀，在欧洲發生了生产上的急剧变革和扩大，于是激起科学技术的蓬勃發展；而科学技术的需要，又远不能从初等数学里得到满足，因而就产生了高等数学中的一些概念和方法。

但与此同时，我国人民受着惨酷的封建統治，束縛了我們的生产力，因而也就束縛了我国数学的發展。

由上可見，数学，和其他科学一样，是从生产实踐中来的，也是随生产实踐的發展而發展的。

但数学并不停留在一些具体的事物上，它从具体事物中抽象出数学概念，發展为数学理論，这些理論只要是正确地反映了現实，它就会能动地指导生产实踐。而生产实踐又会提出新的問題促使数学进一步地發展。

我們学数学，一方面是要理解如何从現实問題中抽象出数学概念，另一方面是要握掌这个工具为生产实踐服务。

（二）数学的定义是什么？

如上所說，数学与生产实踐紧密地联系着。但数学为了要应用到

各种科技上去，它是以抽象的形式出現的。譬如，从太阳、月亮、瓜果等等的形状，人們就抽出了具体內容，得到了“圓”的概念；又如，从“三头牛加两头牛等于五头牛”，“三棵树加两棵树等于五棵树”等等，就得到一个总結性的式子：3+2=5。这样的正确抽象，数学理論才能普遍地用以研究各种事物的空間形状与数量关系。恩格斯說：“純粹数学研究的对象，是現实世界中的空間形状及数量关系，是非常現实的資料。这些資料表現为非常抽象的形式，这一点只能在表面上掩盖它的来源”（恩格斯-反杜林論）。因此，我們認为数学的正确定义应該是：

数学是以現实世界的空間形状与数量关系为对象的科学。

象有些唯心論者所說的：“数学是永远不知道所談論的是什么，也不知道所說的是否真实的一种科学”和“整数是上帝造的”等等，显然是極端荒謬的。

（三）初等数学与高等数学的区别是什么？

通常所說的初等数学，指的是中学里学过的代数、几何和三角等；高等数学指的是本課程所要講的解析几何、微积分等。它們的基本区别是：初等数学研究的对象是不变的量（常量）和圖形；而高等数学研究的对象是变化着的量和圖形。其次，在研究的方法上，初等数学的代数和几何各自独立地建立，处理問題的方法比較孤立；而高等数学則常是采取綜合的办法。例如，在我們将要学到的解析几何中，就是把代数上的‘数’与几何上的‘形’紧密地联系在一起，用代数的方法研究几何。

当然，这种划分是習慣形成的。数学的初等与高等，并沒有严格的界限。实际上初等数学中也包括一些高等数学的概念，如几何学通过極限过程来研究圓的面积，三角学里也綜合地运用代数和几何的方法等等。

高等数学是学習力学、物理学以及基础技术課和專业課的重要工具，高等数学也会帮助我們更深刻地了解辯証法与历史唯物主义。我們一定要掌握它。

基本公式

为了工农干部学習高等数学方便起見，把一些常用的初等数学公式列在下面以供参考。

初等代数

(一) 乘法公式及因式分解。

i) $-(a+b-c)=-a-b+c.$

ii) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

iii) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

注意：$a^2+b^2\neq(a+b)^2.$

iv) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

注意：$(a-b)^2\neq(b-a)^2.$

v) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

注意：$a^3+b^3\neq(a+b)^3.$

vi) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

注意：$a^3-b^3\neq(a-b)^3.$

$(a-b)^3\neq(b-a)^3.$

vii) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

viii) $a^2-b^2=(a-b)(a+b).$

ix) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$

x) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$

xi) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$

其中 n 是正整數。

(二) 分式运算

i）分式前为负号:

$$-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}.$$

注意: $-\frac{b-c}{a}=\frac{b-c}{-a}=\frac{-b+c}{a}.$

ii）約分: $$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}.$$

注意: 1°. 当分子与分母是多項式时，应当先把多項式分解因
再进行約分，如

$$\frac{ab+ac}{ad}=\frac{a(b+c)}{ad}=\frac{b+c}{d}.$$

2°. $$\frac{a^2+b^2}{a+b}\neq a+b.$$

3°. $$\frac{ab+c}{b}\neq a+c.$$

iii）加減法:

$$\frac{b}{d}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}.$$

注意: 1°. 分母必須相同，分子才能直接相加減。

2°. $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq\frac{2}{a+b}.$$

iv）乘法:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

注意: $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}.$

v）除法:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

注意: $\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{bc}$ 或 $=\frac{\frac{a}{c}}{b}.$

（三）二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

i）求根公式：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ii）**根的性質：**

$$\text{当 } b^2-4ac\begin{cases}>0, \text{二根是实数且不相等,}\\=0, \text{二根是实数而且相等,}\\<0, \text{二根是虚数.}\end{cases}$$

iii）根与系数的关系。

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

（四）**指数运算：**

i）$(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$.

ii）$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

iii）$a^m\times a^n=a^{m+n}$.

注意：$a^m+a^n\neq a^{m+n}$.

iv）$a^m\div a^n=a^{m-n}$.

注意：$a^m-a^n\neq a^{m-n}$.

v）$a^0=1$.

vi）$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

vii）$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.

viii）$(a^m)^n=a^{mn}$.

（五）对数运算

i）若 $a^y=x$，則 $y=\log_a x$. $\left(\begin{matrix}a>0, a\neq 1,\\ x>0,\end{matrix}\right)$

ii）$\log_a a=1$.

iii) $\log_a 1=0$.

iv) $\log_a(N_1\cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$.

v) $\log_a\dfrac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$.

vi) $\log_a(N^n)=n\log_a N$.

vii) $\log\sqrt[n]{N}=\dfrac{1}{n}\log_a N$.

viii) $a^{\log_a x}=x$.

ix) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$(换底公式).

（六）二項式公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n.$$

（七）阶乘 $n!=1\times2\times3\cdots\cdot(n-1)\cdot n$.

（八）复数

i) 三角函数式 $r(\cos\Phi+i\sin\Phi)$ 与代数式 $a+bi$ 的关系:

$$\begin{cases}a=r\cos\Phi,\\ b=r\sin\Phi.\end{cases}\qquad\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2},\\ \operatorname{tg}\Phi=\dfrac{b}{a}.\end{cases}$$

ii) 三角函数式的运算:

設 $$m=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$
$$p=r_2(\cos\beta+i\sin\beta);$$

則 $$m\cdot p=r_1\times r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)].$$

$$\frac{m}{p}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)].$$

$$m^n=r_1^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

$$\sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{r_1}\left[\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right],$$

其中，

$$k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

（九）几个函数的圖象

i）正比关系　$y=kx$

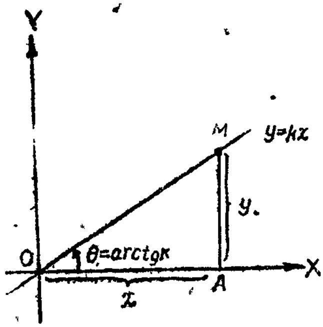

圖 0.1

ii）綫性函数　$y=kx+b$

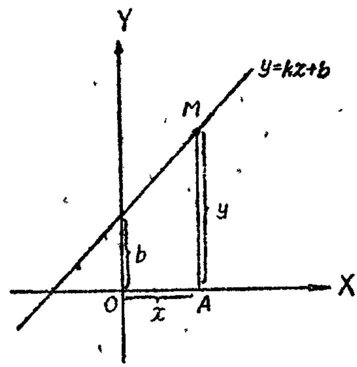

圖 0.2

iii）反比关系　$y=\frac{k}{x}$

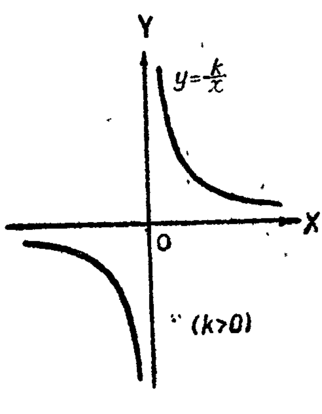

圖 0.3

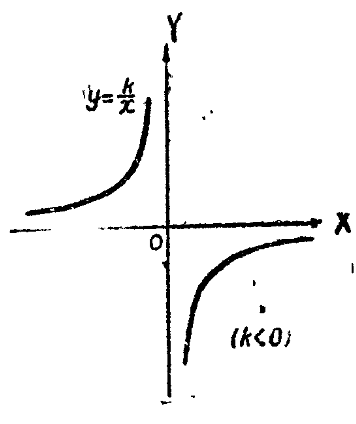

圖 0.4